Основне академске студије
Информациони инжењеринг

Методе и технике науке о подацима

Основи логике, теорије фази скупова и фази логике

(материјали за предавања)

Садржај

1. **Логика**
2. Фази скупови
3. Фази логика
4. Примена фази скупова
5. Извори и литература

Основни концепти исказне логике – понављање

- синтакса
  - исказна формула (формула)
    - атомичка – није могуће даље разлагање
      - исказна слова
      - логичке константе
        - $\top$ („те”)
        - $\bot$ („нете”)
    - сложена – могуће даље разлагање
      - употреба логичких везника и заграда
  - логички везници (од вишег ка нижем нивоу приоритета)
    - унарни
      - $\neg$ (негација)
    - бинарни
      - $\wedge$ (конјункција)
      - $\vee$ (дисјункција)
      - $\Rightarrow$ (импликација)
      - $\Leftrightarrow$ (еквиваленција)
  - заграде

Основни концепти исказне логике – понављање

- семантика
  - 1 (истина, тачно)
  - 0 (неистина, нетачно)
  - интерпретација
  - таблица истинитости
  - база знања
    - база знања је скуп формула које су дате као истините
  - логичка последица

Основни концепти исказне логике – понављање

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \land q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

p	q	$p \lor q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Логика

Основни концепти исказне логике – понављање

p	***q***	***p ⇒ q***
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

p	***q***	***p ⇔ q***
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Логика

Основни концепти исказне логике – понављање

- таутологија
- контрадикција
- нормалне форме
  - конјунктивна нормална форма
  - дисјунктивна нормална форма
- правила извођења
  - елиминација конјункције
  - *modus ponens*
  - …

Основни концепти предикатске логике – понављање

- функцијски симболи
- релацијски симболи
- квантификација
  - $\forall$ (универзални квантификатор)
  - $\exists$ (егзистенцијални квантификатор)

Садржај

Фази скупови

Класични концепт скупа

- елементи и скуп елемената
  - ентитети и њихова повезаност кроз заједничку припадност
- искључивост у погледу припадности елемента скупу
  - разликовање два нивоа припадности
  - елемент или припада или не припада скупу
- неприхватљивост непрецизности, неодређености или нејасноће у погледу припадности скупу

Класични концепт скупа

- класични скуп A
  - енгл. *crisp set*
  - „оштри скуп” („јасни скуп”)
- спецификација скупа
  - кроз експлицитно набрајање елемената скупа (екстензија)

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

  - кроз спецификацију особина које поседују сви елементи скупа (интензија)

$$A=\{a\in\mathbb{Z}\mid P(a)\}$$

$$A=\{a\in\mathbb{Z}\mid 1\leqslant a\leqslant 10\}$$

  - кроз функцију припадности

$$\mu_A(a)=\begin{cases}1, & a\geqslant 0\\ 0, & a<0\end{cases}$$

Фази скупови

Моделовање

- формално моделовање
  - често се ослања на класичну теорију скупова и класичну логику
- модели као апстрактне представе
  - поједностављени поглед на стварни систем
    - занемаривање разних карактеристика зарад могућности формирања употребљиве представе
  - систематизација и класификација
- категоризација појава
  - разврставање појава по изабраним категоријама
    - припадност категорији може бити упитна
      - потребно утврдити да нешто или припада потпуно или не припада уопште
      - потребно изабрати једну од понуђених категорија
        - *добро–лоше*, *лепо–ружно*, *велико–мало*…
    - припадност би могла бити разматрана и на нивоу степена припадности
      - неке појаве су јаче везане за дату категорију од других

Фази скупови

Концепт приближности

- приближност (енгл. *fuzziness*)
  - непрецизност, неодређеност, нејасноћа, неизразитост, оквирност, расплинутост, мутност
- приближност као саставни део живота
  - субјективност и објективност
  - наука
    - физика
      - Хајзенбергов принцип неодређености
  - природни језици
    - појмови нису апсолутно прецизни
      - значај контекста
      - различите особе могу различито посматрати исте појмове
  - људски доживљаји
    - осећања, утисци, ставови
- приближност би могла бити уграђена у формалне моделе
- рад Лотфија Задеа (1965. и касније)

Фази скупови

Фази скуп

- енгл. *fuzzy set*
- „мутни скуп”
- уопштење класичног скупа
- функција припадности елементе пресликава на интервал [0, 1]
  - припадност није ограничена на 0 (не припада) и 1 (припада)
  - степен припадности описан вредношћу функције припадности
    - што је вредност функције припадности ближа вредности 1 то је степен припадности виши
  - када функција припадности обухвата само пресликавања на 0 или 1, фази скуп се своди на класични скуп
  - функција припадности
    - карактеристична функција, функција чланства, ниво чланства, степен истинитости, степен компатибилности, степен припадности, расподела могућности

Фази скупови

Фази скуп – дефиниција

- фази скуп $\boldsymbol{A}$ за дати универзални скуп X

$$\boldsymbol{A}=\{(x, \mu_{\boldsymbol{A}}(x)) | x \in X, 0 \leqslant \mu_{\boldsymbol{A}}(x) \leqslant 1\}$$

  - фази скуп обухвата уређене парове *елемент – степен припадности*
- спецификација фази скупа
  - преко парова *елемент – степен припадности*
  - преко функције припадности

Фази скупови

Фази скуп – представа

- додатне представе фази скупа $\boldsymbol{A}$ зависно од природе универзалног скупа X
  - дискретни и коначни скуп X

$$\boldsymbol{A} = \mu_{\boldsymbol{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\boldsymbol{A}}(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_{\boldsymbol{A}}(x_n)/x_n$$

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\boldsymbol{A}}(x_i)/x_i$$

  - континуални и бесконачни скуп X

$$\boldsymbol{A} = \int_X \mu_{\boldsymbol{A}}(x)/x$$

Фази скупови

Фази скуп – представа

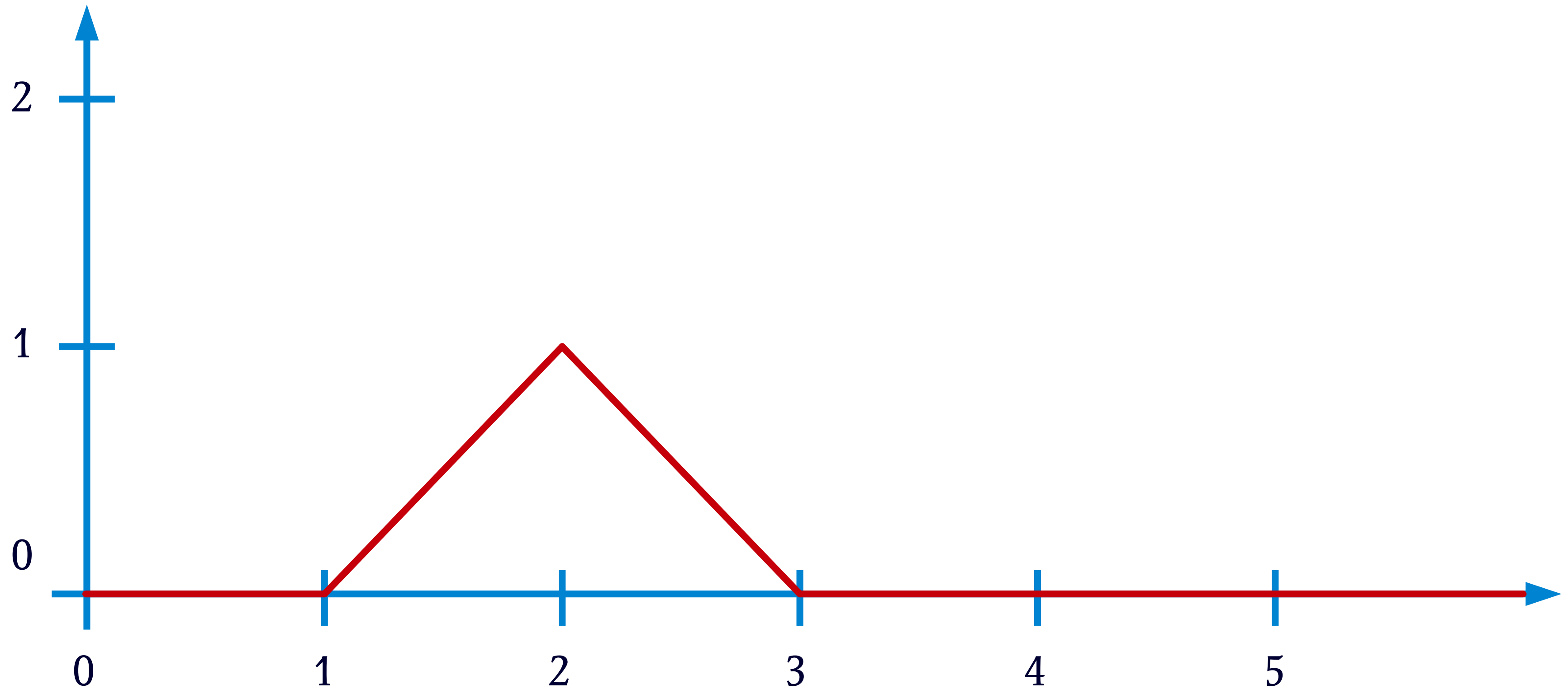
- функција припадности
  - постоје карактеристични облици који се често користе у пракси
    - синглтон
    - троугаона
    - трапезоидна
    - Гаусова

Фази скупови

Фази скуп – представа

функција припадности

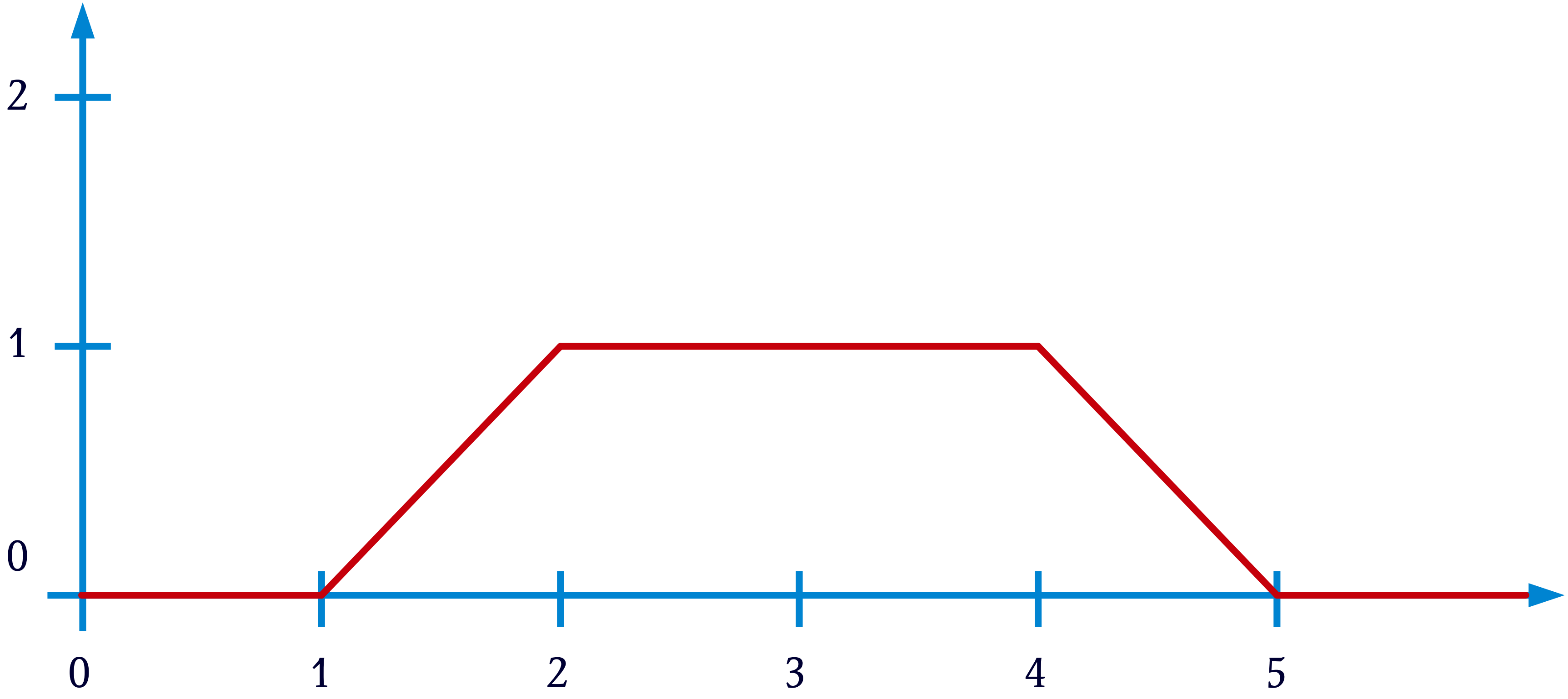
пример троугаоне функције



Фази скуп – представа

функција припадности

пример трапезоидне функције



Фази скупови

Фази скуп – додатни концепти

нормалност фази скупа $\boldsymbol{A}$

услов нормалности

$$\left|\left\{x \mid x \in X, \mu_{\boldsymbol{A}}(x)=1\right\}\right| \geqslant 1$$

кардиналитет коначног фази скупа $\boldsymbol{A}$

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{x \in X} \mu_{\boldsymbol{A}}(x)$$

Фази скуп – додатни концепти

језгро фази скупа ***A***

$$C(\boldsymbol{A}) = \{x \mid x \in X, \mu_{\boldsymbol{A}}(x) = 1\}$$

енгл. *core*

језгро је класични скуп елемената за које је степен припадности у фази скупу једнак 1

Фази скупови

Фази скуп – додатни концепти

потпора фази скупа ***A***

$$S(\boldsymbol{A}) = \{x \mid x \in X, \mu_{\boldsymbol{A}}(x) > 0\}$$

енгл. *support*

потпора је класични скуп елемената за које је степен припадности у фази скупу позитиван

Фази скуп – додатни концепти

границе фази скупа $\boldsymbol{A}$

$$B(\boldsymbol{A}) = \{x \mid x \in X, 0 < \mu_{\boldsymbol{A}}(x) < 1\}$$

енгл. *boundaries*

границе су класични скуп елемената за које је степен припадности у фази скупу позитиван али мањи од 1

Фази скупови

Фази скуп – додатни концепти

α-рез

$$A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$$

енгл. α-*cut*

α-рез је класични скуп елемената за које је степен припадности у фази скупу већи или једнак са вредношћу α

јаки α-рез

$$A'_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > \alpha\}$$

енгл. *strong* α-*cut*

јаки α-рез је класични скуп елемената за које је степен припадности у фази скупу већи од вредности α

Фази скупови

Фази скуп – основне операције

комплемент фази скупа ***A***

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\{(x,1-\mu_{\boldsymbol{A}}(x))|x\in X\}$$

унија фази скупова ***A*** и ***B***

$$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\{(x,\max\{\mu_{\boldsymbol{A}}(x),\mu_{\boldsymbol{B}}(x)\})|x\in X\}$$

пресек фази скупова ***A*** и ***B***

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\{(x,\min\{\mu_{\boldsymbol{A}}(x),\mu_{\boldsymbol{B}}(x)\})|x\in X\}$$

Садржај

1. Логика
2. Фази скупови
3. **Фази логика**
4. Примена фази скупова
5. Извори и литература

Фази логика

Фази логика

- представља развој класичне логике
  - проширење концепта истинитости са две дозвољене вредности на интервал вредности
- ослања се на концепт фази скупа и повезане концепте
- исказ у фази логици повезан с фази скупом
- истинитост исказа у фази логици заснива се на функцији припадности која одговара повезаном фази скупу

Исказ у фази логици

исказ *I*

$$\boldsymbol{I} : x \in \boldsymbol{A}$$

фази скуп *A*

истинитосна вредност исказа *I*

$$T\left(\boldsymbol{I}\right) = \mu_{\boldsymbol{A}}\left(x\right)$$

Фази логика

Логички везници у фази логици

негација за исказ I

$$T(\bar{\boldsymbol{I}}) = 1 - T(\boldsymbol{I})$$

конјункција за исказе I (за фази скуп A) и J (за фази скуп B)

$$T(\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{J}) = \min\{T(\boldsymbol{I}), T(\boldsymbol{J})\}$$

дисјункција за исказе I (за фази скуп A) и J (за фази скуп B)

$$T(\boldsymbol{I} \vee \boldsymbol{J}) = \max\{T(\boldsymbol{I}), T(\boldsymbol{J})\}$$

Логички везници у фази логици

импликација за исказе I (за фази скуп A) и J (за фази скуп B)

једна варијанта импликације (по Задеу)

$$\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{J} \equiv \overline{\boldsymbol{I}} \vee \boldsymbol{J}$$

$$T(\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{J}) = \max\{T(\overline{\boldsymbol{I}}), T(\boldsymbol{J})\}$$

друга варијанта импликације (по Мамданију)

$$T(\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{J}) = \min\{T(\boldsymbol{I}), T(\boldsymbol{J})\}$$

трећа варијанта импликације (по Ларсену)

$$T(\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{J}) = T(\boldsymbol{I})T(\boldsymbol{J})$$

...

Садржај

1. Логика
2. Фази скупови
3. Фази логика
4. **Примена фази скупова**
5. Извори и литература

Примена фази скупова

Језичка променљива

- енгл. *linguistic variable*
- формализација тумачења речи неког језика
- прихватање непрецизности речи
  - прикладност конкретне речи може варирати од појаве од појаве
    - постоје нивои прикладности
    - за једну појаву више различитих речи може послужити као прикладан опис

Примена фази скупова

Језичка променљива

- променљива

$$\left(X, U, R\left(X; u\right)\right)$$

- X
  - назив променљиве
    - x је општа ознака за вредности X
- U
  - универзум дискурса
    - u је општа ознака за елементе U
- $R(X;u)$
  - подскуп од U
    - представља рестрикцију над вредностима u која је наметнута преко X
    - представља распон од X
  - скраћени запис $R(X)$

Примена фази скупова

Језичка променљива

променљива – једначина доделе

$$x = u : R(X)$$

представља доделу вредности u за x под рестрикцијом $R(X)$

једначина доделе је задовољена акко важи да је u елемент $R(X)$

Примена фази скупова

Језичка променљива

- фази променљива

$$\left(X, U, R\left(X; u \right) \right)$$

- X
  - назив променљиве
    - x је општа ознака за вредности X
- U
  - универзум дискурса
    - u је општа ознака за елементе U
- $R(X;u)$
  - фази подскуп од U
    - представља фази рестрикцију над вредностима u која је наметнута преко X
  - скраћени запис $R(X)$

Примена фази скупова

Језичка променљива

- фази променљива – једначина доделе

$$x = u : R(X)$$

представља доделу вредности *u* за *x* под рестрикцијом *R(X)*

за једначину доделе везује се степен задовољености

- *c(u)*
  - компатибилност *u* са *R(X)*

$$c(u) = \mu_{R(X)}(u), u \in U$$

Примена фази скупова

Језичка променљива

фази променљива – пример

$$\left(\boldsymbol{Ocena}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, R\left(\boldsymbol{Ocena}\right)\right)$$

$$R\left(\boldsymbol{Ocena}\right) = 0{,}1/6 + 0{,}3/7 + 0{,}5/8 + 1/9 + 1/10$$

једначина доделе – пример

$$\boldsymbol{Ocena} = 8 : R\left(\boldsymbol{Ocena}\right)$$

$$c\left(8\right) = \mu_{R\left(\boldsymbol{Ocena}\right)}\left(8\right) = 0{,}5$$

Примена фази скупова

Језичка променљива

језичка променљива

$$\left(\Lambda, T(\Lambda), U, G, M\right)$$

- Λ
  - назив променљиве
- $T(\Lambda)$
  - скуп термова – скуп назива језичких вредности за Λ
    - свака вредност је фази променљива за универзум дискурса U
      - X је општа ознака за фази променљиву
- U
  - универзум дискурса
- G
  - синтаксно правило за генерисање назива за вредности Λ
- M
  - семантичко правило за придруживање значења за X
  - $M(X)$ је значење терма X
    - рестрикција $R(X)$ над основном променљивом u наметнута преко X

Примена фази скупова

Језичка променљива

језичка променљива – пример

$$\left(\textbf{Prosek}, \{dobro, osrednje, loše\}, [6, 10], G, M\right)$$

$$M(dobro) = \int_{8}^{9} (u-8)/u + \int_{9}^{10} 1/u$$

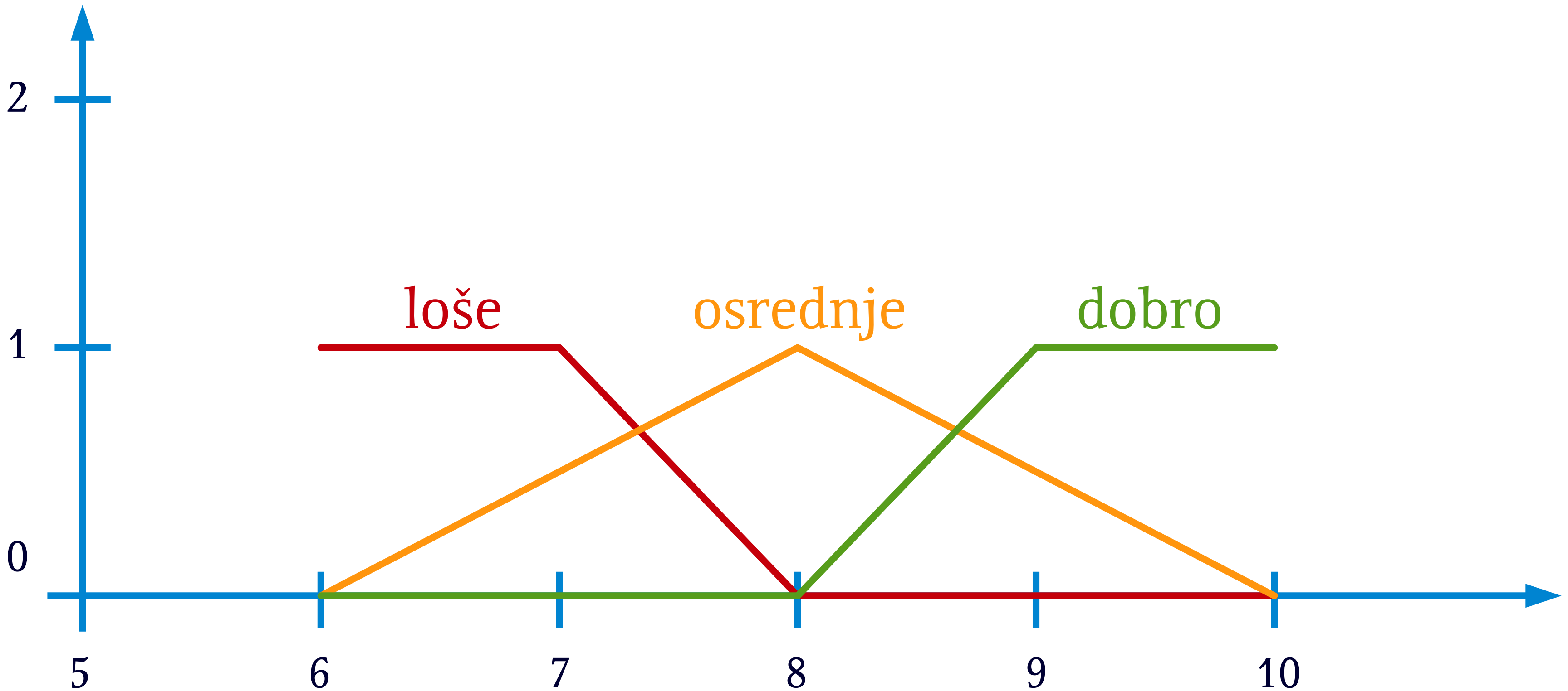
$$M(osrednje) = \int_{6}^{8} \frac{u-6}{2}/u + \int_{8}^{10} \frac{10-u}{2}/u$$

$$M(loše) = \int_{6}^{7} 1/u + \int_{7}^{8} (8-u)/u$$

Језичка променљива

- језичка променљива – пример

$$\left(\mathbf{Prosek}, \{dobro, osrednje, loše\}, [6,\ 10], G, M\right)$$



Садржај

Извори и литература

Основни извори и литература

- Russel S, Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. 3rd edition. Pearson Education (Upper Saddle River, NJ, USA); 2010.
- Zimmerman H-J. Fuzzy Set Theory—and Its Applications. 4th edition. Springer Science+Business Media (New York, NY, USA); 2001.
- Kecman V. Learning and Soft Computing: Support Vector Machines, Neural Networks, and Fuzzy Logic Models. MIT Press (Cambridge, MA, USA); 2001.
- Ross TJ. Fuzzy Logic with Engineering Applications. 3rd edition. Wiley (Chichester, UK); 2010.
- Poole DL, Mackworth AK. Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents. 3rd edition. Cambridge University Press (Cambridge, UK); 2023. Internet: https://www.artint.info/index.html

Извори и литература

Основни извори и литература

- Zadeh LA. Fuzzy Sets. Information and Control. 1965;8; 338–353.
- Zadeh LA. The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning. Memorandum No. ERL-M411. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley (Berkeley, CA, USA); 1973.

Основне академске студије
Информациони инжењеринг

Методе и технике науке о подацима

Основи логике, теорије фази скупова и фази логике

(материјали за предавања)