Matematička logika - Iskazna logika

$\lambda o \gamma o \varsigma$

"a ground", "a plea", "an opinion", "an expectation", "word", "speech", "account", "reason".

- Aristotle - Organon
- Euclid - Elements
- Roman
- Middle Age: Scolastic Thomas Aquinus, 12th centery
- Renesanse: Frencis Bacon, Inductive logic
- Emanuel Kant: "laws of thinking"
- Gotfrid Leibnitz: logic as a universal language

Mathematical Logic - modern era

19th and 20th century

- George Boole
- August de Morgan
- Gotlab Frege: predicate logic
- Giuseppe Peano: axiomatization of natural numbers
- George Cantor: naive set theory

Mathematical Logic - modern era

19th and 20th century

- George Boole
- August de Morgan
- Gotlab Frege: predicate logic
- Giuseppe Peano: axiomatization of natural numbers
- George Cantor: naive set theory
- Bertrand Russell:
  - Principia Mathematicae
  - Paradox: $x \notin x$
- David Hilbert:
  - axiomatization of geometry, analysis
  - Problem of consistency, decidability (Entscheidungsproblem)
  - Program: to provide secure foundations of all mathematics

Mathematical Logic - modern era

19th and 20th century

- George Boole
- August de Morgan
- Gotlab Frege: predicate logic
- Giuseppe Peano: axiomatization of natural numbers
- George Cantor: naive set theory
- Bertrand Russell:
  - Principia Mathematicae
  - Paradox: $x \notin x$
- David Hilbert:
  - axiomatization of geometry, analysis
  - Problem of consistency, decidability (Entscheidungsproblem)
  - Program: to provide secure foundations of all mathematics
- Kurt Gödel:
  - Incompleteness theorems (PA is not complete)
  - Sentence: $\varphi =$ "I am not provable in T", diagonalization
- Alonzo Church, Alain Turing - theoretical computer science
- Gerhard Gentzen - proof theory

Mathematical Logic - modern era: Computability

Nature of functions whose values are effectively calculable; i.e. computable (1930s)

- Church: method for defining functions, λ calculus
- Turing: theoretical model of a machine, Universal Turing Machine
- Kleene and Rosser: recursive functions.

All three computational processes (models) are shown to be equivalent.

Mathematical Logic - modern era: Computability

Nature of functions whose values are effectively calculable; i.e. computable (1930s)

- Church: method for defining functions, λ calculus
- Turing: theoretical model of a machine, Universal Turing Machine
- Kleene and Rosser: recursive functions.

All three computational processes (models) are shown to be equivalent.

Church-Turing thesis

> Everything effectively computable is computable by one of these computational models.

Mathematical Logic - modern era: Proof Theory

Proofs as formal mathematical objects.
Proof calculi (Deductive systems) are formal systems consisting of

- axioms
- inference rules

Proof theory is syntactic in nature, in contrast to model theory, which is semantic in nature.
Gerhard Gentzen

- consistency
- provability $\vdash A$
- decidability

Paradise of logical systems

From theory

- classical logic: propositional and predicate
- intuitionistic logic: propositional and predicate
- modal logics: possibility and necessity
- temporal logic:
- substructural logics relevance, affine, linear logic
- intermediate logic: possibility and necessity
- probabilistic logic
- fuzzy logic
- paraconsistent logic

Paradise of logical systems

From theory

- classical logic: propositional and predicate
- intuitionistic logic: propositional and predicate
- modal logics: possibility and necessity
- temporal logic:
- substructural logics relevance, affine, linear logic
- intermediate logic: possibility and necessity
- probabilistic logic
- fuzzy logic
- paraconsistent logic

to practice and application

- model checking
- interactive proof assistance
- theorem proving
- verification

Iskazna logika - Uvod

- Logički sistemi (iskazna, predikatska logika) ima tri aspekta:
  1. Sintaksu (jezik)
  2. Deduktivne sisteme
  3. Semantiku (značenje iskaza)
- Centralni problemi u iskaznoj logici su ispitivanje da li je data iskazna formula
  - **dokazivost**, $\vdash A$ **teorema**, dokaziva u deduktivnom sistemu
  - **konzistentnost**, $\vdash A$ and $\vdash \neg A$
  - **odlučivost**

  - **valjanost** (tautologija)
  - **zadovoljivost** (SAT problem).

I. Sintaksa iskazne logike

- Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.
- **Alfabet** (signatura) $\sum$ je unija sledeća četiri skupa:
  1. Prebrojivog skupa iskaznih slova $P = \{p, q, r, \dots p_0, q_0, r_0 \dots\}$
  2. skupa logičkih veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
     - $\neg$ - negacija
     - $\wedge$ - konjunkcija
     - $\vee$ - disjunkcija
     - $\Rightarrow$ - implikacija
     - $\Leftrightarrow$ - ekvivalencija

     pri čemu je $\neg$ unarni veznik, a $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ su binarni veznici
  3. skupa logičkih konstanti $\{\bot, \top\}$
  4. skupa pomoćnih simbola $\{(,)\}$

- **Jezik** iskazne logike L (ili skup **iskaznih formula**) nad skupom P je najmanji podskup skupa svih reči nad $\sum$ takav da važi:
  - Iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule
  - Ako su A i B iskazne formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule
- Jezik L
  - $P \subset L$
  - $\top, \bot \in L$
  - $A, B \in L$ onda $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B \in L$
- Apstraktna sintaksa (Backus-Naur)

$$A, B ::= p|\bot|\top|\neg A|A \wedge B|A \vee B|A \Rightarrow B|A \Leftrightarrow B$$

$$A ::= p|\bot|\top|\neg A|A \wedge A|A \vee A|A \Rightarrow A|A \Leftrightarrow A$$

- Elementi skupova P (iskazna slova, promenljive) i $\{\bot, \top\}$ nazivaju se **atomičkim iskaznim formulama**.
- **Literal** je iskaz koji je ili atomička iskazna formula ili njena negacija.
  p, $\neg p$
- **Klauza** je disjunkcija literala.
  $p \vee \neg q \vee r$

II. Deductive Systems of formal a formal theory

Three most well-known kinds of proof calculi are:

- Axiomatic (Hilbert) system:
  - axioms (e.g. $A \to A$)
  - Modus Ponens

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

II. Deductive Systems of formal a formal theory

Three most well-known kinds of proof calculi are:

- Axiomatic (Hilbert) system:
  - axioms (e.g. $A \to A$)
  - Modus Ponens

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

- Natural Deduction:
  - axioms
  - elimination rules (MP)
  - introduction rules

II. Deductive Systems of formal a formal theory

Three most well-known kinds of proof calculi are:

- Axiomatic (Hilbert) system:
  - axioms (e.g. $A \to A$)
  - Modus Ponens

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

- Natural Deduction:
  - axioms
  - elimination rules (MP)
  - introduction rules
- Sequent Calculus:
  - axioms
  - left introduction rules correspond to elimination rules
  - right introduction rules correspond to introduction rules
  - cut rule

Pojam dokaza moze da se razlikuje od jednog do drugog deduktivnog sistema.
Obicno je dokaz niz formula (ili skup formula pridruzenih stablu)

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

, takav da za svako i ili vazi da je

- formula A_i aksioma teorije T ili
- važi da je A_i direktna posledica nekih od prethodnih formula u nizu na osnovu nekog pravila izvodenja.

Dobro zasnovana formula A teorije T je teorema teorije T ako postoji dokaz ciji je poslednji clan formula A.
Taj dokaz tada zovemo dokazom formule A.
Tada kazemo i da je formula A dokaziva u teoriji T .
Pod pojmom ,,teorija T podrazumevamo skup svih teorema teorije T .
Ako postoji efektivna procedura za utvrdjivanje da li je data formula teorema teorije T , onda kazemo da je teorija T odluciva , a inace kazemo da je neodlučiva . Mnoge interesantne teorije su neodlučive.

Axiomatic (Hilbert style) system
Intuitionistic Logic

Brouwer, Heyting 1960s

- Axioms
  $(Ax1)$ $A \to A$
  $(Ax2)$ $A \to (B \to A)$
  $(Ax3)$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- Rule

$$(MP) \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}$$

Axiomatic (Hilbert style) system

Intuitionistic Logic

Brouwer, Heyting 1960s

- Axioms
  $(Ax1)$ $A \to A$
  $(Ax2)$ $A \to (B \to A)$
  $(Ax3)$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- Rule

$$(MP) \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}$$

Not provable

- $((A \to B) \to A) \to A$, Peirce's law.
- $A \vee \neg A$, law of excluded middle (tertium non datur).
- $\neg\neg A \to A$, double negation elimination.

Axiomatic (Hilbert style) system

Classical Logic

- Axioms

  $(Ax1)\ A \to A$

  $(Ax2)\ A \to (B \to A)$

  $(Ax3)\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

- Rule

  $$(MP) \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}$$

Axiomatic (Hilbert style) system

Classical Logic

- Axioms
  (Ax1) $A \to A$
  (Ax2) $A \to (B \to A)$
  (Ax3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  (Ax4) $A \vee \neg A$
- Rule

  $$(MP) \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}$$

Interdefinability of connectives: minimal bases for defining all connectives:

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- Peirce arrow (NOR) or
- Sheffer stroke (NAND).

Natural Deduction

Intuitionistic Logic

Gentzen, Prawitz 1960s

- Axiom

$(Ax1)$ $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

- Rules

$(\to_{elim})$ $$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$(\to_{intr})$ $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Natural Deduction

Intuitionistic Logic, Classical Logic

Gentzen, Prawitz 1960s

- Axiom

$(Ax1)$ $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

$(Ax2)$ $$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

- Rules

$(\rightarrow_{elim})$ $$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$(\rightarrow_{intr})$ $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

Sequent calculus

Intuitionistic Logic LJ

- Axiom

(Ax) $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

- Rules

$(\rightarrow_L)$ $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C}$$

$(\rightarrow_R)$ $$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

(Cut) $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Sequent calculus

Intuitionistic Logic LJ, Classical Logic LK

- Axiom

(*Ax*) $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

- Rules

$(\rightarrow_L)$ $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash C, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C, \Delta}$$

$(\rightarrow_R)$ $$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$$

(*Cut*) $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta}$$

$\sqrt{2}$

Theorem

Postoje iracionalni brojevi p i q takvi da je broj p^q racionalan.

Dokaz.
Ako je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionalan, onda brojevi $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ zadovoljavaju zadati uslov.
Ako $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nije racionalan, onda na osnovu
$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in Q$
brojevi $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $\sqrt{2}$ zadovoljavaju zadati uslov.
Q.E.D.
Koristili smo zakon iskljucenja trećeg (tertium non datur) $A \vee \neg A$.
I dalje ne znamo koji su to brojevi, znamo samo da postoje.
To je intuicionistima neprihvatljivo.

A proof of the Peirce law

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\,(ax)}{\vdash A \to B, A}\,(\to R) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to R)}\,(\to L)$$

A proof of the Peirce law

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\color{red}{A} \vdash B, \color{red}{A}}\,(ax)}{\vdash A \to B, A}\,(\to R) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to R)}\,(\to L)$$

A proof of the Peirce law

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\,(ax)}{\vdash A \to B, A}\,(\to R) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to R)}\,(\to L)$$

A proof of the Peirce law

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\,(ax)}{\vdash A \to B, A}\,(\to R) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to R)}\,(\to L)$$

A proof of the Peirce law

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\,(ax)}{\vdash A \to B, A}\,(\to R) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(ax)}{\dfrac{(A \to B) \to A \vdash A}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to R)}\,(\to L)$$

Indukcija nad skupom iskaznih formula

Teorema o matematičkoj indukciji

- Nake je ϕ svojstvo reči jezika nad alfabetom $\sum$.
  Pretpostavimo da za svojstvo ϕ važi:
  - svojstvo ϕ važi za svaku atomičku iskaznu formulu
  - ako svojstvo ϕ važi za iskazne formule A i B, onda ono važi i za iskazne formule: $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$
- Tada svojstvo ϕ **važi za svaku iskaznu formulu**.

Dokaz.

III Semantika iskazne logike, Tarski, 1933

- Semantički aspekt iskazne logike govori o značenju formula.
- Funkcije iz P u $\{0,1\}$ nazivamo **valuacijama**. Svaka valuacija v odredjuje funkciju I_v koju zovemo **interpretacijom** za valuaciju v.
- Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:
  - $I_v(p) = v(p)$, za svaki element p skupa P
  - $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$
  - $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$
  - $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$; $I_v(A \wedge B) = 0$ inače
  - $I_v(A \vee B) = 0$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(B) = 0$; $I_v(A \vee B) = 1$ inače
  - $I_v(A \Rightarrow B) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 0$; $I_v(A \Rightarrow B) = 1$ inače
  - $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$, ako je $I_v(A) = I_v(B)$; $I_v(A \Leftrightarrow B) = 0$ inače
- Vrednost $I_v(A)$ zovemo vrednošću iskazne formule A u interpretaciji I_v,
- Valuacija v je **zadovoljavajuća** za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v **model** za A i pišemo $v \models A$

Pravila za odredjivanje vrednosti iskazne formule u zadatoj valuaciji mogu biti reprezentovana osnovnim **istinitosnim tablicama**:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

- Formula A je valjana ili **tautologija** ako je svaka valuacija za nju zadovoljavajuća i to zapisujemo $\models A$. Iskazna formula je **nezadovoljavajuća ili kontradikcija** ako ne postoji valuacija koja je za nju zadovoljavajuća. Formula je **poreciva** ako postoji valuacija koja za nju nije zadovoljavajuća.
  Primer: Iskazne formule $p \Rightarrow p$ i $p \vee \neg p$ su tautologije; iskazna formula $p \Rightarrow q$ je zadovoljiva i poreciva, a iskazna formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija.
- **Teorema:** Ako su iskazne formule A i $A \Rightarrow B$ tautologije, onda je i B tautologija.
  Dokaz. Klasičan svodjenjem na protivrečnost.

Logičke posledice

- Iskazna formula A je **logička posledica** skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.
- **Teorema:**
  a) Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.
  b) Ako je skup Γ kontradiktoran, onda je svaka formula njegova logička posledica. Specijalno, svaka formula je logička posledica skupa $\{\bot\}$.
  c) Ako je $\Gamma \subset \Delta$ i $\Gamma \models A$, onda je $\Delta \models A$.
  d) Ako je formula A valjana i $\Gamma \models B$, onda je $\Gamma \backslash \{A\} \models B$.
- **Teorema:** $\Gamma, A \models B$ ako i samo ako $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Logička ekvivalencija

- Kažemo da su dve iskazne formule A i B **logički ekvivalentne** i pišemo $A \equiv B$ ako je svaki model formule A model i za B i obratno (važi $A \models B$ i $B \models A$).
- **Teorema:** Važi $A \equiv B$ ako i samo ako je iskazna formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija.
  Primeri logičkih ekvivalencija:
  $\neg\neg A \equiv A$ zakon dvojne negacije
  $A \wedge A \equiv A$ zakon idempotencije za $\wedge$
  $A \vee B \equiv B \vee a$ zakon komutativnosti za $\vee$
  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ zakon asocijativnosti za $\wedge$
  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ zakon apsorpcije
  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ De Morganov zakon

Supstitucija

- Rezultat **zamene (supstitucije)** svih pojavljivanja iskazne formule C u iskaznoj formuli A iskaznom formulom D označavamo sa $A[C \to D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:
  - ako za iskazne formule A i C važi $A = C$, onda je $A[C \to D]$ jednako D,
  - ako za iskazne formula A i C važi $A \neq C$ i A je atomička iskazna formula, onda je $A[C \to D]$ jednako A,
  - ako za iskazne formule A, B i C važi $A \neq C$ i $A = (\neg B)$, onda je $A[C \to D] = \neg(B[C \to D])$,
  - ako za iskazne formule A, B_1, B_2 i C važi $A \neq C$ i $A = (B_1 \wedge B_2)$, $(A = (B_1 \vee B_2), A = (B_1 \Rightarrow B_2)$, $A = (B_1 \Leftrightarrow B_2)$, onda je $A[C \to D] = (B_1[C \to D]) \wedge (B_2[C \to D])((B_1[C \to D]) \vee (B_2[C \to D]), (B_1[C \to D]) \Rightarrow (B_2[C \to D]), (B_1[C \to D]) \Leftrightarrow (B_2[C \to D]))$.
- **Teorema o zameni:** Ako je $C \equiv D$, onda je $A[C \to D] \equiv A$.

Potpuni skupovi veznika

- **Teorema:** Svaka istinitosna funkcija je generisana nekom iskaznom formulom koja sadrži samo veznike $\wedge$, $\vee$ i $\neg$.
  Primer:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

  Iskazna formula A koja generiše istinitosnu funkciju f je $(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$.

- U bilo kojoj iskaznoj formuli, mogu se, korišćenjem ekvivalencija

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

  eliminisati sva pojavljivanja veznika $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ i V. Kažemo da je skup veznika $\{\neg, \wedge\}$ **potpun**, jer je svaka iskazna formula logički ekvivalentna nekoj iskaznoj formuli samo nad ova dva veznika i bez logičkih konstanti $\top$ i $\bot$.
- Veznici $\uparrow$ i $\downarrow$ definišu se na sledeći način:

$$A \downarrow B = \neg(A \vee B)$$

$$A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$$

A	B	$A \downarrow B$	$A \uparrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Važne osobine - Potpunost teorije L

Theorem (Saglasnost teorije L (Soundness))

Ako je formula A teorema, onda je A valjana.

$$\vdash A \text{ onda } \models A$$

Theorem (Potpunost teorije L (Completeness))

Ako je formula A valjana, onda je A teorema.

$$\models A \text{ onda } \vdash A$$

Theorem

- $\vdash A$ *ako i samo ako* $\models A$
- $\Gamma \vdash A$ *ako i samo ako* $\Gamma \models A$

Važne osobine - Konzistentnost i odlučivost teorije L

Theorem (Odlučivost teorije L)

Teorija L je odlučiva.

Theorem (Konzistentnost teorije L)

Teorija L je konzistentna. Ne postoji formula A takva da su i A i $\neg A$ teoreme teorije L.

Normalne forme

- Iskazna formula je u **konjunktivnoj normalnoj formi** (KNF) ako je oblika $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ pri čemu je svaka od formula $A_i (1 \leq i \leq n)$ klauza (disjunkcija literala).
- Iskazna formula je u **disjunktivnoj normalnoj formi** (DNF) ako je oblika $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ pri čemu je svaka od formula $A_i (1 \leq i \leq n)$ konjunkcija literala.
- Svaka iskazna formula može biti transformisana u svoju konjunktivnu (disjunktivnu) normalnu formu korišćenjem pogodnih ekvivalencija.

Dejvis-Patnam-Logman-Lovelandova procedura

- Dejvis-Patnam-Logman-Lovelandova procedura (DPLL procedura) vrši ispitivanje **zadovoljivosti iskaznih formula** (SAT problem).
- Primenjuje se na iskazne formule u konjunktivnoj normalnoj formi (postoji za svaku iskaznu formulu).
- U proceduri se podrazumevaju sledeće konvencije:
  - prazan skup klauza (prazna formula) je zadovoljiva
  - klauza koja ne sadrži nijedan literal (prazna klauza) je nezadovoljiva
  - formula koja sadrži praznu klauzu je nezadovoljiva
- **Teorema** (Korektnost DPLL procedure): Za svaku iskaznu formulu DPLL procedura se zaustavlja i vraća odgovor DA **ako i samo ako** je polazna formula zadovoljiva.

DPLL algoritam

Ulaz: multiskup klauza $D(D = \{C_1, C_2, \dots, C_n\})$
Izlaz: DA, ako je multiskup D zadovoljiv;
NE, ako multiskup D nije zddovoljiv

1. Ako je D prazan, vrati DA.
2. Zameni sve literale $\neg\bot$ sa $\top$ i zameni sve literale $\neg\top$ sa $\bot$.
3. Obriši sve literale jednake $\bot$.
4. Ako D sadrži praznu klauzu, vrati NE.
5. Ako neka klauza C_i sadrži literal $\top$ ili sadrži i neki literal i njegovu negaciju, vrati vrednost koju vraća DPLL $(D \setminus C_i)$ (tautology).
6. Ako je neka klauza jedinična i jednaka nekom iskaznom slovu p, onda vrati vrednost koju vraća DPLL $(D[p \to \top])$; ako je neka klauza jedinična i jednaka $\neg p$, gde je p neko iskazno slovo, onda vrati vrednost koju vraća DPLL $(D[p \to \bot])$ (nit propagation).

1. Ako D sadrži literal p (gde je p neko iskazno slovo), a ne i literal $\neg p$, onda vrati vrednost koju vraća DPLL $(D[p \rightarrow \top])$; Ako D sadrži literal $\neg p$ (gde je p DPLL $(D[\neg p \rightarrow \top])$ (pure lilteral).
2. Ako DPLL $(D[p \rightarrow \top])$ vraća DA, onda vrati DA; inače vrati vrednost koju vraća DPLL $(D[p \rightarrow \bot])$ (p je jedno od iskaznih slova koje se javljaju u D) (split).

Dejvis-Patnam-Logman-Lovelandova procedura

- Kako SAT problem spada u grupu NP-kompletnih problema, DPLL procedura je u najgorem slučaju **eksponencijalne složenosti** $O(2^N)$, gde je N broj iskaznih slova u formuli.
- Iako je DPLL procedura predstavljena još 1962. godine i dalje predstavlja bazu najefikasnijih algoritama za rešavanje SAT problema.
- DPLL proceduru možemo iskoristiti i za ispitivanje da li je data formula tautologija, poreciva ili kontradikcija.
- Pravci razvoja:
  - Definisanje novih pravila za izbor literala u pravilu split,
  - Definisanje novih struktura podataka u cilju ubrzanje izvršenja algoritma,
  - Razvoj varijacija osnovnog algoritma sa vraćanjem.

- Kako SAT problem spada u grupu NP-kompletnih problema, DPLL procedura je u najgorem slučaju **eksponencijalne složenosti** $O(2^N)$, gde je N broj iskaznih slova u formuli.
- Iako je DPLL procedura predstavljena još 1962. godine i dalje predstavlja bazu najefikasnijih algoritama za rešavanje SAT problema.