Matematička logika - Predikatska logika

Predikatska logika, predikatski račun, logika prvog reda

- Jezik predikatskog računa nastao je kao **prirodno uopštenje jezika matematičkih formula**, tj. matematičkog jezika koji obuhvata simbole za konstante i promenljive, operacije, relacije i kvantifikatore.
- **Izražajne mogućnosti ovog jezika su znatno veće** od mogućnosti koje pruža jezik iskaznog računa.
- Jezik predikatskog računa dopušta i **izražavanje objekata, operacija i relacija** koje su van posebnih matematičkih teorija, što ga čini univerzalnim sredstvom predstavljanja znanja o operacijama i relacijama sa objektima iz raznih domena.

Simboli jezika predikatskog računa

Alfabet:

- promenljive $x, y, z, \ldots$ ili $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- n-arni funkcijski simboli (operacijska slova) f_k^n, $n \geq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
- n-arni predikatski simboli (relacijska slova) r_k^n, $n \geq 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
- kvantifikatori $\forall$, $\exists$
- logički veznici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- logičke konstante $\perp$, $\top$
- Pomoćni znaci: zagrade i znaci interpunkcije $(\,,\,), ,$
- Od ovih simbola grade se:

  termi, elementarne formule i **formule**.

Jezik - osnovne definicije

- TERMI
  1. Simboli konstanti i promenljive su termi.
  2. Ako su $t_1, t_2, \dots, t_n$, $n \geq 1$ termi i znak f n-arni funkcijski simbol, onda je izraz $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ takodje term.
  3. Izraz je term samo u slučaju ako to sledi iz pravila 1. ili 2. ove definicije.
- ELEMENTARNA FORMULA
  1. Logičke konstante $\perp$, $\top$ su elementarne formule.
  2. Ako je r n-arni predikatski simbol, a $t_1, t_2, \dots, t_n$ termi, onda je $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ elementarna formula.
- DOBRO ZASNOVANE FORMULE - FORMULE
  1. Svaka elementarna formula je dobro zasnovana formula.
  2. Ako je A dobro zasnovana formula, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ dobro zasnovane formule.
  3. Ako je A dobro zasnovana formula i x promenljiva, onda su i $((\forall x)A)$, $((\exists x)A)$ dobro zasnovane formule.

- VEZANO POJAVLJIVANJE PROMENLJIVE x
  1. Ako je formula F oblika $(\forall x)A$ ili $(\exists x)A$
  2. Ako postoji podformula $((\forall x)B)$ ili $((\exists x)B)$ u formuli F.
- SLOBODNO POJAVLJIVANJE PROMENLJIVE
  Ono koje nije vezano.
- LITERAL
  Literal je elementarna formula ili njena negacija.
- KLAUZA
  Klauza je disjunkcija literala.
- JEZIK PREDIKATSKOG RAČUNA
  Jezik predikatskog računa je skup svih dobro zasnovanih formula.

Deduktivni sistemi predikatskog računa

- Aksiomatski (Hilbertov) sistem:
  - pet shema axioma (3+2)
  - dva pravila izvodjenja (MP + 1)
- Prirodna dedukcija
- Sekventni sistem

Račun logike prvog reda zadan je s pet shema aksioma i dva pravila izvodjenja. Sheme aksioma su sledeće:

(A1) $A \to (B \to A)$;

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

(A4) $\forall x A(x) \to A(t/x)$, gde je term t slobodan za promenljivu x u formuli A;

(A5) $\forall x (A \to B) \to (A \to \forall x B)$, gde formula A ne sadrži slobodna pojavljivanja promenljive x.

Pravila izvodjenja su Modus Ponens i generalizacija, tj.

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \text{i} \qquad \frac{A}{\forall x A}.$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$$

Formula A je iz premisa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dobijena primenom

- aksioma
- pravila izvodjenja

Ovako definisani sistem kratko ćemo označavati s PR.

Važne teoreme

Theorem (Teorema o dedukciji)

Ako važi $\Gamma, A \vdash B$ *gde je* A *zatvorena formula, onda važi* $\Gamma \vdash A \to B$*. Važi i obrat, bez ograničenja za formulu* A

Semantika predikatskog računa

- Semantičko značenje pridružuje se formuli putem **interpretacije** na nekom konkretnom domenu.
- Za domen interpretacije uzima se neki neprazan skup D, čiji elementi služe kao interpretacije (vrednosti) za konstante sadržane u formuli.
- INTERPRETACIJA I
  1. PROMENLJIVA se interpretira kao **VREDNOST** IZ DOMENA D.
  2. FUNKCIJSKI SIMBOL (OPERACIJSKO SLOVO) se interpretira kao **OPERACIJA**.
  3. PREDIKATSKI SIMBOL (RELACIJSKO SLOVO) se interpretira kao **RELACIJA**.
- U vezi sa datom relacijom postavlja se pitanje pod kojim uslovima je relacija zadovoljena (SAT), tj. tačna na domenu, a kada nije.

Primer:

$$(\forall x)(\exists y)r(f(x,y),a) \qquad\qquad (\forall x)(\exists y)(x+y=5)$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} r & f & x & y & a \\ = & + & x & y & 5 \end{pmatrix} \quad \nearrow$$

- **tačna** je na domenu celih brojeva
- **nije tačna** je na domenu prirodnih brojeva

$$(\forall x)(\exists y)r(f(x,y),a) \qquad\qquad (\forall x)(\exists y)(x \cdot y=1)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} r & f & x & y & a \\ = & \cdot & x & y & 5 \end{pmatrix} \quad \nearrow$$

- **tačna** je na domenu racionalnih brojeva
- **nije tačna** je na domenu prirodnih i celih brojeva

Valjane formule

- Formula je tačna pri interpretaciji I ako se tom interpretacijom pretvori u tačan iskaz.
- U tom slučaju interpretaciju I zovemo model te formule, a za formulu kažemo da je ZADOVOLJIVA.
- Ako je formula tačna pri svakoj interpretaciji, onda kažemo da je ona VALJANA.
- Ako formula nije valjana, onda kažemo da je ona PORECIVA.
- Ako je formula netačna pri svakoj interpretaciji, onda kažemo da je KONTRADIKCIJA.
- Formula koja nije zadovoljiva, jeste kontradikcija.

Osobine

- Formula A je *valjana* ako i samo ako je formula $(\forall x)A$ valjana.
- Formula A je takva da su sve njene slobodne promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada važi: formula A je valjana ako i samo ako je njeno univerzalno zatvorenje, $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A$, valjana formula.
- Formula A je *zadovoljiva* ako i samo ako je formula $(\exists x)A$ zadovoljiva.
- Formula A je takva da su sve njene slobodne promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada važi: formula A je zadovoljiva ako i samo ako je njeno egzistencijalno zatvorenje $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)A$ zadovoljiva formula.

Logičke posledice

- Uopštena zamena (**supstitucija**) σ je niz zamena koji je oblika $[x_1 \rightarrow t_1, x_2 \rightarrow t_2, \ldots, x_n \rightarrow t_n]$
- Formula A **logička posledica** skupa formula Γ, u oznaci $\Gamma \models A$, ako je svaki model od skupa formula Γ ujedno i model za A.
- Kažemo da su dve formule A i B logičke ekvivalencije ako je svaka od njih logička posledica one druge i tada pišemo $A \equiv B$.

Logička ekvivalencija

- Kažemo da su dve formule A i B **logički ekvivalentne** i pišemo $A \equiv B$ ako je svaka od njih logička posledica one druge $A \models B$ i $B \models A$ (ako je svaki model formule A model i za B i obratno).
- **Teorema:** Važi $A \equiv B$ ako i samo ako je iskazna formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

Primeri logičkih ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x)A &\equiv (\exists x)\neg A \text{ De Morganov zakon}\\
\neg(\exists x)A &\equiv (\forall x)\neg A \text{ De Morganov zakon}\\
(\forall x)(A \wedge B) &\equiv (\forall x)A \wedge (\forall x)B\\
(\exists x)(A \vee B) &\equiv (\exists x)A \vee (\exists x)B\\
(\forall x)(A \vee B) &\equiv (\forall x)A \vee B \text{ zakon distributivnosti, } x \notin Fv(B)
\end{aligned}$$

PRENEX algoritam

- Kažemo da je formula u **prenex normalnoj formi** ako je oblika
$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A \qquad Q_i \in \{\forall, \in\}$$
- **Konjuktivna normalna forma**: $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n$, gde je A_i disjunkcija literala
- **Klauzalna forma**: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$
- <u>Primer</u>:

$$\forall z (p(x) \wedge \forall x \exists y (q(y,z) \Rightarrow r(g(w,x),y)))$$

$$\forall z \forall u \exists y (p(x) \wedge (\neg q(y,z) \vee r(g(w,u),y)))$$

Skolemizacija

- Proces eliminisanja egzistencijalnih kvantifikatora
- Skolemove konstante i Skolemove funkcije
- Transformacija formule A u klauzalnu formu
- $(\exists y)A$ transformišemo u $A[y \to d]$
- $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y A$ transformišemo u

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A[y \to f(x_2, x_2, \ldots, x_n)]$$

- Ako je formula B dobijena skolemizacijom od formule A, onda je A zadovoljiva ako i samo ako je B zadovoljiva.
- Primer:

$$\forall z \forall u \exists y (p(x) \wedge (\neg q(y, z) \vee r(g(w, u), y)))$$

$$\forall z \forall u (p(x) \wedge (\neg q(h(z, u), z) \vee r(g(w, u), h(z, u))))$$

So Cindy Crawford is in the news again. Many many years ago, I was teaching first-order logic to a sophomore class, relating examples of sentences and models: A world in which every man loves his mother satisfies

$$\forall x.\exists y.(man(x) \to loves(x, y))$$

whereas

$$\exists y.\forall x.(man(x) \to loves(x, y))$$

needed a world with a woman like Cindy Crawford. To which Ranjit Jhala sitting in one of the rows memorably piped up, "Exactly. That's a model"

Erbranova teorema

- Nezadovoljivost formule može biti pokazana u konačnom broju slučajeva
- Mogući su sledeći slučajevi:
  - formula A **je nezadovoljiva** i tada proces se zaustavlja (pronadjena je kontradikcija)
  - formula A **nije nezadovoljiva** i tada su moguća dva ishoda:
    - u jednom trenutku nema više instanci i do tada nije otkrivena kontradikcija, pa znamo da formula nije nezadovoljiva (znamo da je zadovoljiva)
    - proces generisanja instanci se ne zaustavlja, ni u jednom koraku se ne može detektovati kontradikcija, pa ne znamo da li je formula nezadovoljiva ili nije

- Dakle, problem valjanosti u predikatskoj logici u opštem slučaju nije odlučiv
- Nezadovoljivost formule može biti pokazana u konačnom broju slučajeva
- Mogući su sledeći slučajevi:
  - formula **je nezadovoljiva** i tada proces se zaustavlja (pronadjena je kontradikcija)
  - formula **nije nezadovoljiva** i tada su moguća dva ishoda:
    - u jednom trenutku nema više instanci i do tada nije otkrivena kontradikcija, pa znamo da formula nije nezadovoljiva (znamo da je zadovoljiva)
    - proces generisanja instanci se ne zaustavlja, ni u jednom koraku se ne može detektovati kontradikcija, pa ne znamo da li je formula nezadovoljiva ili nije

Važne osobine

Theorem (Saglasnost teorije PR)

Ako je formula A teorema, onda je A valjana.

Theorem (Potpunost teorije PR)

Ako je formula A valjana, onda je A teorema .

Theorem (Konzistentnost teorije PR)

Teorija PR je konzistentna. Ne postoji formula A takva da su i A i $\neg A$ teoreme teorije PR.

Theorem (Neodlučivost teorije PR)

Teorija PR je neodlučiva.