

Brojni sistemi i predstave brojeva


Predstavljanje označenih celih brojeva

Označeni celi brojevi u komplement 10 predstavi

- Sabiranje i oduzimanje brojeva sa predznakom
 - ograničen broj cifara:

$$\begin{array}{r} 68 \\ + (-57) \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ + (-57) + 1000 - 1000 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ + 943 \\ \hline 011 \quad (1011 - 1000) \end{array}$$


- 943 - trocifrena komplement 10 predstava broja -57
- n-cifarski komplement negativnog broja:
 - dodavanje 10^n
 - komplementiranje

Komplementiranje

- -57
- 057 (potpuna apsolutna vrednost)
- 942 (komplement 9)
- 943 (komplement 10)
 - dodavanje jedinice na komplement 9
- +68 \rightarrow 068
- -57 \rightarrow 057 \rightarrow 942 \rightarrow 943
- prva cifra je predznak

cifra	komplement	komentar
0	9	0+9==9
1	8	1+8==9
2	7	2+7==9
3	6	3+6==9
4	5	4+5==9
5	4	5+4==9
6	3	6+3==9
7	2	7+2==9
8	1	8+1==9
9	0	9+0==9

Sabiranje i oduzimanje u komplement 10 predstavi

099	(+99)
098	(+98)
097	(+97)
096	(+96)
...	
002	(+2)
001	(+1)
000	(0)
999	(-1)
998	(-2)
...	
903	(-97)
902	(-98)
901	(-99)
900	(-100)

	993 (-7)	993 (-7)	020 (+20)
	+ 002 (+2)	+ 010 (+10)	- 021 (+21)
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	995 (-5)	003 (+3)	020
			+ 979
			<hr/>
			999 (-1)

Izlazak van opsega

- Posledica aritmetike ograničenog broja cifara
- Primeri za 3 cifre:

$$\begin{array}{r}
 999 \quad (-1) \\
 + 999 \quad (-1) \\
 \hline
 998 \quad (1998) \quad (-2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 050 \\
 + 050 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 900 \\
 - 001 \\
 \hline
 899
 \end{array}$$

neoznačeni

van opsega

OK

OK

označeni

OK

van opsega

van opsega

Poređenje neoznačenih celih brojeva

- relacija $==$ važi, ako je rezultat oduzimanja 0
- relacija $!=$ važi, ako rezultat oduzimanja nije 0
- relacija $<$ važi, ako se pri oduzimanju javi izlazak van opsega (u obliku prenosa)
- relacija $>=$ važi, ako se pri oduzimanju ne javi izlazak van opsega ili je rezultat 0
- relacija $>$ važi, ako se pri oduzimanju ne javi izlazak van opsega i rezultat nije 0
- relacija $<=$ važi, ako se pri oduzimanju javi izlazak van opsega (u obliku prenosa) ili je rezultat 0

Poređenje označenih celih brojeva

- relacija $==$ važi, ako je rezultat oduzimanja 0
- relacija $!=$ važi, ako rezultat nije 0
- relacija $<$ važi, ako je rezultat negativan (najznačajnija cifra 9) ili se pri oduzimanju izade van opsega (najznačajnija cifra 8)
- relacija $>=$ važi, ako je rezultat pozitivan (najznačajnija cifra 0) ili se pri oduzimanju izade van opsega (najznačajnija cifra 1) ili je rezultat 0
- relacija $>$ važi, ako je rezultat pozitivan (najznačajnija cifra 0) ili se pri oduzimanju izade van opsega (najznačajnija cifra 1)
- relacija $<=$ važi, ako je rezultat negativan (najznačajnija cifra 9) ili se pri oduzimanju izade van opsega (najznačajnija cifra 8) ili je rezultat 0

Relacija $<$ u komplement 10 predstavi

levi operand	desni operand	$<$	razlika (komplement 10 predstava)
88	99	da	088-099 == 989
-99	99	da	901-099 == 802
-19	19	da	981-019 == 962
-99	-88	da	901-912 == 989
99	88	ne	099-088 == 011
99	-99	ne	099-901 == 198
19	-19	ne	019-981 == 038
-88	-99	ne	912-901 == 011

Aritmetika ograničenog broja cifara

- **Višestruka preciznost** – vrednost broja veća od broja cifara lokacije
- Zbog čega nam treba višestruka preciznost?
 - Primene: kriptografija, numerička matematika, inženjerstvo
- **Ne važe klasični zakoni aritmetike**
- Rezultat zavisi od redosleda obavljanja operacija!

$$(200+800)-500 \neq 200+(800-500)$$

Predstavljanje realnih brojeva

Predstavljanje realnih brojeva

- **Pozicioni oblik:** 0.000000127
- **Normalizovana forma:** 1.27×10^{-7}
- **Mašinska normalizovana forma (MNF)** (engl. *floating point representation*)
 - **predznak** - 1 cifra
 - **frakcija** – razlomljeni deo, signifikand, m cifara
 - **podešeni eksponent** – konstanta podešavanja 10^{n-1} , n cifara
 - 0031270000_{MNF10}
 - 0 03 1270000
- Gubljenje preciznosti
 - greška predstave realnih brojeva

Aritmetika MNF

- „Raspakivanje“ MNF
 - Određivanje predznaka rezultata
 - Izjednačavanje eksponenata (prema većem)
- Izvršavanje operacije
- Normalizacija frakcije
- „Pakovanje“ MNF

Sabiranje u aritmetici MNF

$$\begin{array}{r}
 0031270000_{\text{MNF10}} \quad (1.27 \times 10^{-7}) \\
 + 0091000001_{\text{MNF10}} \quad (1.000001 \times 10^{-1}) \\
 \hline
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 0090000001_{\text{MNF10}} \quad (0.000001 \times 10^{-1}) \\
 + 0091000001_{\text{MNF10}} \quad (1.000001 \times 10^{-1}) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$0091000002_{\text{MNF10}} \quad (1.000002 \times 10^{-1})$$

- Oduzimanje, množenje, deljenje
- Izlazak van opsega samo u eksponentu, prekobrojne cifre frakcije se odbacuju

Binarni brojni sistem

Binarni brojni sistem

Binarni broj je broj predstavljen u **binarnom brojnom sistemu** tj. **sistemu sa osnovom 2**

U binarnom sistemu numeričke vrednosti se predstavljaju pomoću **dva različita simbola**: obično 0 i 1

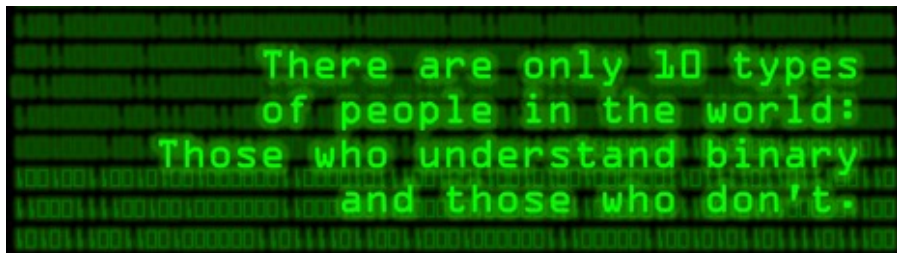
Pozicioni brojni sistem:

$$\begin{aligned} 13 &= 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = \\ &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
16	8	4	2	1	
0	0	0	0	0	00



Gottfried Leibniz
(1646–1716)



Postupak konverzije brojeva

Konverzija celog dela dekadnog broja u binarni

$$\dots + d_1 10^1 + d_0 10^0 \quad == \quad \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0$$

$$6_{10} \quad == \quad \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \quad | :2$$

$$0 \quad == \quad b_0 \quad \text{(ostatak deljenja)}$$

$$3_{10} \quad == \quad \dots + b_2 2^1 + b_1 2^0 \quad | :2 \quad \text{(količnik)}$$

$$1 \quad == \quad b_1 \quad \text{(ostatak deljenja)}$$

$$1 \quad == \quad \dots + b_3 2^1 + b_2 2^0 \quad | :2 \quad \text{(količnik)}$$

$$1 \quad == \quad b_2 \quad \text{(ostatak deljenja)}$$

$$0 \quad \text{(količnik)}$$

$$6_{10} \quad == \quad 110_2$$

Postupak konverzije brojeva

Konverzija razlomljenog dela dekadnog broja

$$d_{-1}10^{-1}+d_{-2}10^{-2}+\dots == b_{-1}2^{-1}+b_{-2}2^{-2}+\dots$$

$$0.375_{10} == b_{-1}2^{-1}+b_{-2}2^{-2}+\dots \quad | \times 2$$

$$0 == b_{-1} \quad (\text{celi deo proizvoda})$$

$$0.75_{10} == b_{-2}2^{-1}+b_{-3}2^{-2}+\dots \quad | \times 2 \quad (\text{razlomljeni deo proizvoda})$$

$$1 == b_{-2} \quad (\text{celi deo proizvoda})$$

$$0.5_{10} == b_{-3}2^{-1}+b_{-4}2^{-2}+\dots \quad | \times 2 \quad (\text{razlomljeni deo proizvoda})$$

$$1 == b_{-3} \quad (\text{celi deo proizvoda})$$

$$0 \quad (\text{razlomljeni deo proizvoda})$$

$$0.375_{10} == 0.011_2$$

Beskonačna periodičnost

- 0.2_{10}
- $0.2_{10} = 0.001100110011\dots_2 \approx 0.0011_2$
- $0.0011_2 = 0.1875_{10}$
- Greška aproksimacije: 0.0125_{10}

Konverzija iz binarnog u dekadni brojni sistem

Konverzija celog dela binarnog broja u dekadni

$$\begin{aligned}
 & \dots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 & == & ((\dots + b_2) \times 2 + b_1) \times 2 + b_0 \\
 X_{10} & & == & 110_2 \\
 X_{10} & & == & ((b_2) \times 2 + b_1) \times 2 + b_0 \\
 X_{10} & = & b_2 & == 1 \\
 X_{10} & = & X_{10} \times 2 + b_1 & == 1 \times 2 + 1 == 3 \\
 X_{10} & = & X_{10} \times 2 + b_0 & == 3 \times 2 + 0 == 6 \\
 X_{10} & == & 6 & \\
 6_{10} & == & 110_2 &
 \end{aligned}$$

Konverzija iz binarnog u dekadni brojni sistem

Konverzija razlomljenog dela binarnog broja u dekadni

$$b_{-1}2^{-1} + b_{-2}2^{-2} + b_{-3}2^{-3} + \dots == (b_{-1} + (b_{-2} + (b_{-3} + \dots)/2)/2)/2$$

$$X_{10} == 0.0011_2$$

$$X_{10} == (b_{-1} + (b_{-2} + (b_{-3} + (b_{-4})/2)/2)/2)/2$$

$$X_{10} = b_{-4} == 1$$

$$X_{10} = X_{10}/2 + b_{-3} == 1/2 + 1 == 1.5$$

$$X_{10} = X_{10}/2 + b_{-2} == 1.5/2 + 0 == 0.75$$

$$X_{10} = X_{10}/2 + b_{-1} == 0.75/2 + 0 == 0.375$$

$$X_{10} = X_{10}/2 == 0.375/2 == 0.1875$$

$$0.1875_{10} == 0.0011_2$$

Heksadecimalni brojni sistem

- Baza: 16
- Cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- Konverzija binarnog u heksadecimalni brojni sistem:
 - Primer: $101111_2 == 5F_{16}$
- Konverzija heksadecimalnog u binarni brojni sistem:
 - Primer: $FA09_{16} == 1111101000001001_2$

Aritmetika ograničenog broja cifara u binarnom brojnom sistemu

- Sabiranje i oduzimanje u binarnom brojnom sistemu:

a	b	suma	prenos
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

00000101 (5)

+ 00000011 (3)

00001000 (8)

a	b	razlika	pozajmica
0	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	1	1

00000101 (5)

-00000011 (3)

00000010 (2)

Komplement 2 predstava označenih celih brojeva

01111111	(+127)
01111110	(+126)
...	
00000001	(+1)
00000000	(0)
11111111	(-1)
...	
10000001	(-127)
10000000	(-128)

+2 → 00000010

-2 → 00000010 (potpuna apsolutna vrednost)

11111101 (komplement 1 – jedinični komplement, komplement najveće cifre)

11111110 (komplement 2 – dvojični komplement, komplement osnove)

INT8 – standardna reprezentacija u dubokim neuronskim mrežama i velikim jezičkim modelima

Izlazak van opsega kod sabiranja označenih brojeva

najznačajniji bit prvog sabirka (S ₁)	najznačajniji bit drugog sabirka (S ₂)	najznačajniji bit zbira (Z)	izlazak van opsega
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Logička funkcija izlaska van opsega kod sabiranja označenih brojeva:

$$((\sim S_1) \& (\sim S_2) \& Z) | (S_1 \& S_2 \& (\sim Z))$$

$$f = \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \cdot Z + S_1 \cdot S_2 \cdot \bar{Z}$$

Izlazak van opsega kod oduzimanja označenih brojeva

najznačajniji bit umanjenika (U ₁)	najznačajniji bit umanjioaca (U ₂)	najznačajniji bit razlike (R)	izlazak van opsega
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Logička funkcija izlaska van opsega kod oduzimanja označenih brojeva:

$$((\sim U_1) \& U_2) \& R \mid (U_1 \& (\sim U_2) \& (\sim R))$$

$$f = \overline{U_1} \cdot U_2 \cdot R + U_1 \cdot \overline{U_2} \cdot \overline{R}$$

Interpretacija rezultata

Neoznačeni:

$$\begin{array}{r}
 11111111_2 (255_{10}) \\
 +11111111_2 (255_{10}) \\
 \hline
 11111110_2 (254_{10})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 01000000_2 (64_{10}) \\
 +01000000_2 (64_{10}) \\
 \hline
 10000000_2 (128_{10})
 \end{array}$$

Označeni:

$$\begin{array}{r}
 11111111_2 (-1_{10}) \\
 +11111111_2 (-1_{10}) \\
 \hline
 11111110_2 (-2_{10})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 01000000_2 (+64_{10}) \\
 + 01000000_2 (+64_{10}) \\
 \hline
 10000000_2 (-128_{10})
 \end{array}$$

Poređenje celih brojeva

- **Određivanje relacija** se svodi na oduzimanje:
 - Da li je razlika jednaka 0 ili različita od 0?
 - Da li je razlika negativna ili pozitivna?
 - Da li se, pri oduzimanju neoznačenih celih brojeva, javlja izlazak van opsega (u obliku prenosa)?
 - Da li, pri oduzimanju označenih celih brojeva, razlika izlazi van opsega?
- **Logičke promenljive** za opisivanje osobina razlike:
 - N – nula (l – razlika je 0)
 - M – minus (l – razlika je negativna)
 - P – prenos (l – pri oduzimanju neoznačenih prenos)
 - V – van opsega (l – pri oduzimanju označenih van opsega)

Relacije pomoću logičkih promenljivih

Uslovi važenja relacija za neoznačene

relacija važi	ako je tačan logički izraz
\equiv	N
\neq	$\sim N$
$<$	P
\geq	$\sim P$
$>$	$(\sim P) \& (\sim N)$
\leq	$P \vee N$

Uslovi važenja relacija za označene

relacija važi	ako je tačan logički izraz
\equiv	N
\neq	$\sim N$
$<$	$M \wedge V$
\geq	$\sim (M \wedge V)$
$>$	$\sim (M \wedge V) \& (\sim N)$
\leq	$(M \wedge V) \vee N$

Karakteristični slučajevi važenja relacije $<$

levi operand	desni operand	$<$	M	V
+	+	da	1	0
-	+	da	1	0
-	-	da	1	0
+	+	ne	0	0
+	-	ne	0	0
-	-	ne	1	1
-	-	ne	0	0

Binarni brojni sistem

- Višestruka preciznost
 - Delovi vrednosti u različitim lokacijama, operacije deo po deo
- Zakoni aritmetike
 - **Ne važe** klasični **zakoni aritmetike**
 - Rezultat zavisi od redosleda obavljanja operacija zbog mogućeg izlaska van opsega
 - $(10000100_2 + 10100000_2) - 10000000_2 \neq 10000100_2 + (10100000_2 - 10000000_2)$

Predstavljanje vrednosti realnog tipa u binarnom brojnom sistemu

- MNF8 – 1 cifra za znak, 4 za podešeni eksponent (konstanta podešavanja $2^{4-1}=8$), 3 za frakciju
- Prva (najznačajnija) cifra frakcije je uvek 1, izlazak van opsega moguć samo u eksponentu

$$10101000_{\text{MNF8}} == -1.000_2 \times 2^{-3} == -0.125_{10}$$

$$00000000_{\text{MNF8}} == 0.0$$

$$01000000_{\text{MNF8}} == +1.000_2 \times 2^0 == +1.0_{10}$$

$$01001011_{\text{MNF8}} == +1.011_2 \times 2^1 == +2.75_{10}$$

$$01110001_{\text{MNF8}} == +1.001_2 \times 2^6 == +72.0_{10}$$

Predstavljanje realnih brojeva – IEEE 754

Float 32-bit (FP32)

0 1000000000 1001000100000111111011011

$$(-1)^0 \times 2^1 \times 1.5707964 = 3.1415927410125732$$

higher precision

Float 16-bit (FP16)

0 100000 100100010000

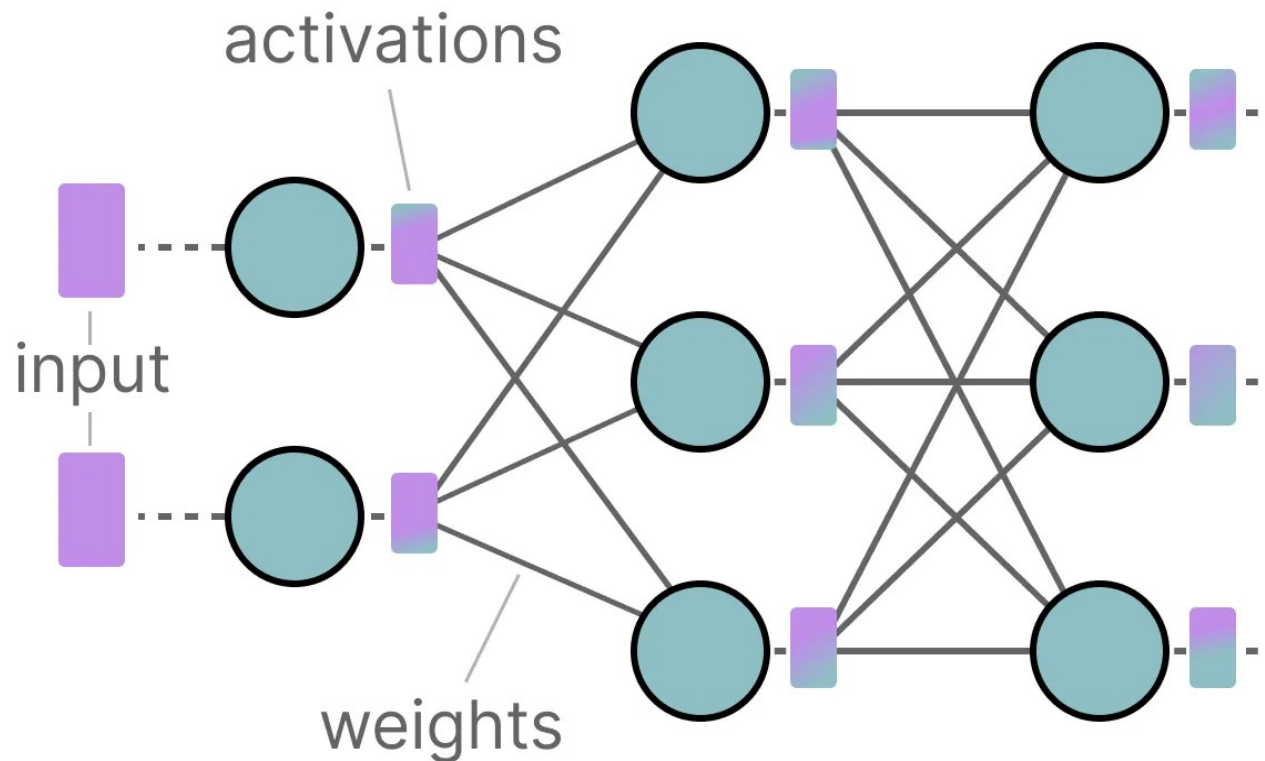
$$(-1)^0 \times 2^1 \times 1.5703125 = 3.140625$$

lower precision

original value
3.1415927

Izvor: J. Alammar, "Hands-on Large Language Models", O'Reilly, 2024.

Primena – veliki jezički modeli, kvantizacija



izlaz iz neurona = aktivaciona funkcija(težina x ulaz + pomeraj)

Izvor: J. Alammari, "Hands-on Large Language Models", O'Reilly, 2024.

Višeznačna interpretacija celih brojeva

- $01001011 \longrightarrow 75 \longrightarrow 2.75$

- Neophodna konverzija:

$$75_{10} == 1001011_2 == 1.001011_2 \times 2^6 \approx 1.001_2 \times 2^6$$

$$== 72.0_{10} == 01110001_{\text{MNF8}}$$

i u suprotnom smeru:

$$72.0_{10} == 01110001_{\text{MNF8}} == 1.001_2 \times 2^6$$

$$== 1001000.0_2 == 1001000_2 == 72_{10}$$

- Konverzija nije uvek moguća – **realni tip (MNF) pokriva veći opseg vrednosti od celobrojnog tipa**