

Основне академске студије  
Информациони инжењеринг

Методе и технике науке о подацима

**Одабране класе  
неуронских мрежа**  
(материјали за предавања)

- 1. Конволуционе неуронске мреже**
2. Рекурентне неуронске мреже
3. Извори и литература

## Конволуционе неуронске мреже

употреба операција конволуције и обједињавања

постоје посебне врсте слојева које се разликују од класичних слојева

конволуциони слој

обједињавајући слој

садрже и класичне слојеве

обучавање

могуће кроз поступак пропагације уназад

примена у разним доменима

обрада временских низова података

обрада вишедимензионалних података

обрада мултимедијалног садржаја

посебно погодне за обраду слика

веће практичне могућности у одређеним сценаријима употребе

у односу на класичне вишеслојне неуронске мреже

мањи број параметара

већа отпорност на одређене промене у улазима

транслација, скалирање, искривљење...

## Инспирација

потиче из биологије

чуло вида

визуални сигнали крећу од очију и стижу до видне зоне, која се налази у потиљачном режњу коре предњег мозга

сигнали се даље преносе до теменог и до слепоочног режња

резултати Дејвида Хјубела и Торстена Визела

истраживања визуалног опажања код сисара током 50-их и 60-их година XX века  
многи неурони имају ограничено пријемно поље (енгл. *receptive field*)

реагују на одређени део видног поља

одређени неурони највише реагују на посебне једноставне визуалне шаблоне  
одређени неурони реагују на сложене визуалне шаблоне који су изграђени од једноставнијих

## Инспирација

примена биолошких принципа у конволуционим неуронским мрежама

погодност конволуционих неуронских мрежа за препознавање образаца у сликама

излаз посматраног неурона у неком слоју не мора зависити од свих излаза из претходног слоја

може бити ограничен само на одређене излазе из претходног слоја

образац може бити поступно препознаван

прво бивају препозната основна својства

затим сложенија својства као резултат комбиновања једноставнијих

истраживања у сфери неуронских мрежа

рад Кунихика Фукушима од краја 70-их година XX века

рад Јана Лекена и сарадника током 90-их година XX века

## Конволуциони слој

конволуција

операција над две функције

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

важи комутативност

## Конволуциони слој

### конволуција

дискретна конволуција

$$(f * g)(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)$$

важи комутативност

пример за функције више променљивих

$$(f * g)(t, u) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} f(\tau, v)g(t-\tau, u-v)$$

$$(g * f)(t, u) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} g(\tau, v)f(t-\tau, u-v)$$

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

излази слоја бивају генерисани тако што се трансформишу улази помоћу кернела

трансформација се обавља помоћу операције конволуције

$$f * g$$

функција  $f$  описује улазе

одговара улазима слоја

улази могу бити посматрани као вишедимензионални низ (тензор)

пример тога је матрица која може представљати слику

функција  $g$  описује кернел

одговара тежинама слоја у класичним вишеслојним неуронским мрежама

кернел може бити посматран као вишедимензионални низ

пример тога је матрица која се користи приликом трансформације улаза

резултат трансформације је мапа својстава (енгл. *feature map*)

представља излазе конволуционог слоја

мапа својстава може бити посматрана као вишедимензионални низ

пример тога је матрица која може представљати правилности у слици

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

пример

$$f * g$$

*f*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

*g*

1	0
2	3

резултат

1	2	3	0
6	12	18	9
15	30	36	18
14	37	42	27

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

кернел

1	0
2	3

мапа својстава

1	2	3	0
6	12	18	9
15	30	36	18
14	37	42	27

*не мора  
целокућан  
резултат бити  
коришћен*

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

мапа својстава

12	18
30	36

кернел

1	0
2	3

обрнути кернел  
настаје  
пресликавањем  
кернела по  
главним осама

мапа својстава може  
бити формирана и  
тако што обрнути  
кернел бива помножен  
елемент по елемент са  
сваким неурекидним  
исечком улаза који је  
истих димензија као  
обрнути кернел

(може се замислити  
како се обрнути кернел  
помера преко улаза, при  
чему, у свакој позицији  
кернела, кернел и  
покривени део улаза  
бивају помножени  
елемент по елемент)

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

мапа својстава

12	18
30	36

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 12$$

кернел

1	0
2	3

*визуални пример  
последица рачунања  
маје својстава  
(корак 1)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

мапа својстава

12	18
30	36

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 18$$

кернел

1	0
2	3

*визуални пример  
последица рачунања  
мапе својстава  
(корак 2)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

мапа својстава

12	18
30	36

$$4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 30$$

кернел

1	0
2	3

*визуални пример  
посејуйка рачунања  
маје својстава  
(корак 3)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања

пример

$$f * g$$

улази

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

мапа својстава

12	18
30	36

$$5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 36$$

кернел

1	0
2	3

*визуални пример  
посејуйка рачунања  
маје својстава  
(корак 4)*

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

примена конволуције

постоје три основна облика конволуције која се користе у пракси  
унутрашња (енгл. *valid*)

приликом спровођења поступка померања, ниједан део кернела не сме покривати део изван улаза

последица тога је да излази могу бити мањих димензија него улази  
ободна (енгл. *same*)

приликом спровођења поступка померања, дозвољене су позиције кернела у којима део кернела може покривати и део изван улаза, али тако да на крају излази буду истих димензија као улази

за покривене делове који су изван улаза подразумевају се нулте вредности (енгл. *zero padding*)

потпуна (енгл. *full*)

приликом спровођења поступка померања, дозвољене су све позиције кернела у којима је покривен барем један део улаза

за покривене делове који су изван улаза подразумевају се нулте вредности (енгл. *zero padding*)

последица тога је да излази могу бити већих димензија него улази

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

пример – примена конволуције – унутрашњи облик

улази

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

кернел

1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0

мапа својстава

183	191	199
239	247	255
295	303	311

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

пример – примена конволуције – ободни облик

улази

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

кернел

1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0

мапа својстава

70	76	82	88	94	55	21
115	122	129	136	143	76	28
167	175	183	191	199	97	35
223	231	239	247	255	118	42
279	287	295	303	311	139	49
182	187	192	197	202	49	0
114	117	120	123	126	0	0

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

трансформација улаза помоћу кернела

пример – примена конволуције – потпуни облик

улази

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

кернел

1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0

мапа својстава

1	3	6	9	12	15	18	13	7	0	0
9	20	32	37	42	47	52	34	14	0	0
24	50	70	76	82	88	94	55	21	0	0
46	87	115	122	129	136	143	76	28	0	0
75	131	167	175	183	191	199	97	35	0	0
110	180	223	231	239	247	255	118	42	0	0
145	229	279	287	295	303	311	139	49	0	0
130	177	182	187	192	197	202	49	0	0	0
108	111	114	117	120	123	126	0	0	0	0
79	81	83	85	87	89	91	0	0	0	0
43	44	45	46	47	48	49	0	0	0	0

## Конволуциони слој

унакрсна корелација

операција над две функције

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau+t) d\tau$$

дискретна унакрсна корелација

$$(f \star g)(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau+t)$$

пример за реалне функције више променљивих

$$(f \star g)(t, u) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} f(\tau, v) g(\tau+t, v+u)$$

## Конволуциони слој

конволуција и унакрсна корелација  
сличност

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau + t) d\tau$$

међусобна повезаност

$$(f(t) \star g(t))(t) = (\overline{f(-t)} * g(t))(t)$$

## Конволуциони слој

конволуција и унакрсна корелација

трансформација улаза помоћу кернела

у пракси уместо конволуције може бити примењена унакрсна корелација  
поступак померања је једноставнији када се користи унакрсна корелација  
приликом померања долази до померања кернела који није додатно обрађен  
не долази до обртања кернела

код примене конволуције у поступку померања помера се обрнути кернел  
обрнути кернел код конволуције одговара кернелу код унакрсне корелације

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

конволуција и унакрсна корелација

пример

$$f * g$$

улази ( $f$ )

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

кернел ( $g$ )

1	0
2	3

резултат

1	2	3	0
6	12	18	9
15	30	36	18
14	37	42	27

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

конволуција и унакрсна корелација

пример

$$g * f$$

улази ( $f$ )

1	2	3
4	5	6
7	8	9

обрнути кернел

3	2
0	1

кернел ( $g$ )

1	0
2	3

резултат

1	2	3	0
6	12	18	9
15	30	36	18
14	37	42	27

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

конволуција и унакрсна корелација

пример

$$g \star f$$

улази ( $f$ )

1	2	3
4	5	6
7	8	9

кернел ( $g$ )

3	2
0	1

резултат

1	2	3	0
6	12	18	9
15	30	36	18
14	37	42	27

# Конволуционе неуронске мреже

## Конволуциони слој

### улази и излази слоја

пример за слику као улазе слоја

слика може бити представљена као вишедимензионални низ

у основи је 2Д структура где су димензије ширина и висина (матрица)

може постојати низ матрица где свака матрица одговара једном каналу

за случај основне слике у боји типа *RGB* постоје три канала

за сваки пиксел постоје три компоненте (црвена, зелена и плава)

одговарајући излази обухватиће онолико мапа својстава колико постоји канала у улазима

број мапа својстава у излазима може бити и другачији

пример за видео као улазе слоја

у основи је 3Д структура где су димензије време, ширина фрејма и висина фрејма

## Конволуциони слој

параметри једног слоја

прагови

постојање једног прага по свакој мапи својстава у излазима

приликом рачунања појединачне вредности за неку мапу својстава у излазима

на крају рачунања се надодаје вредност одговарајућег прага

постоје и други начини како прагови могу бити коришћени у конволуционим неуронским мрежама

тежине

постојање једне групе тежина по свакој мапи својстава

група тежина одговара кернелу

## Конволуциони слој

подешавање једног слоја

одређивање димензија за мапе својстава

одређивање димензија за кернел

одређивање дужине за корак у поступку померања

одређивање облика конволуције

## Обједињавајући слој

примена операције обједињавања

енгл. *pooling*

главна намена је да се улаз додатно редукује како би могли бити издвојени главни обрасци

појединачни сегменти улазних вредности бивају представљени појединачним излазним вредностима

примена релативно једноставне трансформације над сегментом улазних вредности

излазна вредност зависи само од одређених улазних вредности  
последично се смањује број потребних параметара у неуронској мрежи  
смањује се ризик од преучености

мања промена у улазним вредностима не мора имати већи утицај на излазне вредности

могуће је обједињавање прилагодити улазима различитих димензија

## Обједињавајући слој

### обједињавање

над сегментима улаза примењује се одабрана агрегациона функција

примери агрегационих функција

максимум

средња вредност

пондерисана средња вредност

$l_2$  норма ( $L_2$ , еуклидска)

најчешће се користе обједињавање кроз максимум (енгл. *max pooling*) и обједињавање кроз средњу вредност (енгл. *mean pooling*)

поступно примењивање агрегационе функције преко кернела задатих димензија уз коришћење задатог корака

примена модификованог поступка померања

разлика у односу на примену конволуције то што се примењује одабрана агрегациона функција

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела

обједињавање кроз максимум

пример

улаз

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кернел


излаз

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонтали  
и по вертикали*

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања  
обједињавање кроз максимум  
пример

улази

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кернел


излази

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонтално  
и по вертикали*

*излази настају тако  
што кернел бива  
примењиван над  
непрекидним исечцима  
улаза који су истих  
димензија као кернел*

*(може се замислити  
како се кернел помера  
са задатим кораком  
преко улаза, при чему, у  
свакој позицији кернела,  
агрегациона функција  
бива примењена над  
покривеним делом  
улаза)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања  
обједињавање кроз максимум  
пример

улази

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кернел


излази

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонталу  
и по вертикали*

*визуални пример пошуйка  
рачунања излаза  
(корак 1)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања  
обједињавање кроз максимум  
пример

улази

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кернел


излази

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонтално  
и по вертикали*

*визуални пример постојећег  
рачунања излаза  
(корак 2)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања  
обједињавање кроз максимум  
пример

улази

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кернел


излази

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонтално  
и по вертикали*

*визуални пример постојећег  
рачунања излаза  
(корак 3)*

# Конволуционе неуронске мреже

## Обједињавајући слој

трансформација улаза помоћу кернела – поступак померања  
обједињавање кроз максимум  
пример

улази

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

кERNEL


излази

6	8
14	16

*након примене  
корака дужине два  
и по хоризонтално  
и по вертикали*

*визуални пример постојећег  
рачунања излаза  
(корак 4)*

## Обједињавајући слој

подешавање једног слоја

одређивање димензија за мапе својстава

одређивање димензија за кернел

одређивање дужине за корак у поступку померања

одређивање облика обједињавања

## Одлике

посебности у односу на класичне вишеслојне неуронске мреже

постојање конволуционих слојева

примена операције конволуције

постојање обједињавајућих слојева

примена операције обједињавања

## Одлике

посебности у односу на класичне вишеслојне неуронске мреже

концепт пријемног поља (енгл. *receptive field*)

појединачна вредност у излазима слоја не мора бити израчуната на основу свих вредности у улазима слоја већ само на основу неких димензије кернела одговарају димензијама пријемног поља за појединачни слој

дељење тежина (енгл. *weight sharing*)

не мора постојати по једна тежинска вредност за сваки пар облика улазна вредност – излазна вредност

више излазних вредности може бити израчунато применом истог вишедимензионалног низа вредности параметара

исти кернел може бити коришћен за одређивање више излазних вредности кроз дељење тежина смањује се број параметара за које је неопходно одредити вредност приликом обучавања

отпорност на неке локацијске промене у улазима (енгл. *location invariance*)

мања промена у улазима не мора довести до великих промена у излазима

могућност уочавања образаца и након одређених трансформација над улазима  
пример

отпорност на мање транслације у оквиру улаза

## Архитектуре

постоје бројне варијације у пракси

различити бројеви слојева

различити распореди слојева

различите врсте слојева

различите структуре појединачних слојева

различити начини понашања појединачних слојева

## један шаблон

често се у низу слојева конволуционе неуронске мреже може наћи карактеристичан низ од три слоја различитих врста

1. примена операција конволуције (конволуциони слој)
2. примена нелинеарне функције активације (детекциони слој)
3. примена операције обједињавања (обједињавајући слој)

## избор архитектуре

условљен постављеним задатком

природом улаза и излаза неуронске мреже

може се поћи од постојећих архитектура које су успешно примењиване за исте или сличне задатке

## Архитектуре – пример А

### архитектура *LeNet-5*

класична конволуциона неуронска мрежа

LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition. Proceedings of the IEEE. 1998 November;86(11); 2278–2324.

организација у седам слојева

подешавање 60.000 параметара

пример примене у препознавању писаних знакова

скуп података чине слике писаних цифара

базе података Националног института за стандарде и технологију (*National Institute of Standards and Technology, NIST*) из САД

## Архитектуре – пример А

### архитектура *LeNet-5*

улаз

слика димензија  $32 \times 32$

први скривени слој – конволуциони слој

шест мапа својстава, свака димензија  $28 \times 28$

за сваку мапу својстава постоји и по један кернел и по један праг

кернел димензија  $5 \times 5$

хиперболички тангенс као функција активације

други скривени слој – обједињавајући слој

шест мапа својстава, свака димензија  $14 \times 14$

свака мапа својстава повезана с једном одговарајућом мапом својстава из претходног слоја

обједињавање кроз средњу вредност па множење резултата коефицијентом за сваку мапу својстава постоји и по један коефицијент и по један праг

кернел димензија  $2 \times 2$

хиперболички тангенс као функција активације

## Архитектуре – пример А

### архитектура *LeNet-5*

трећи скривени слој – конволуциони слој

шеснаест мапа својстава, свака димензија  $10 \times 10$

свака мапа својстава повезана са 3, 4 или 6 мапа својстава из претходног слоја  
за сваку мапу својстава постоји и по један праг

кернел димензија  $5 \times 5$

хиперболички тангенс као функција активације

четврти скривени слој – обједињавајући слој

шеснаест мапа својстава, свака димензија  $5 \times 5$

свака мапа својстава повезана с једном одговарајућом мапом својстава из  
претходног слоја

обједињавање кроз средњу вредност па множење резултата коефицијентом  
за сваку мапу својстава постоји и по један коефицијент и по један праг

кернел димензија  $2 \times 2$

хиперболички тангенс као функција активације

## Архитектуре – пример А

### архитектура *LeNet-5*

пети скривени слој – конволуциони слој

120 мапа својстава, свака димензија  $1 \times 1$

свака мапа својстава повезана са свим мапама својстава из претходног слоја  
за сваку мапу својстава постоји и по један праг

кернел димензија  $5 \times 5$

хиперболички тангенс као функција активације

шести скривени слој – класични слој

84 неурона

сваки неурон повезан са сваким излазом из претходног слоја  
за сваки неурон постоји и по један праг

хиперболички тангенс као функција активације

излазни слој – класични слој

10 неурона

сваки неурон повезан са сваким излазом из претходног слоја  
еуклидска радијална базна функција (енгл. *Euclidean radial basis function*) као  
функција активације

## Архитектуре – пример Б

### архитектура *AlexNet*

дубока конволуциона неуронска мрежа

Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. *Advances in Neural Information Processing Systems* 25 (NIPS 2012) [Pereira F, Burges CJ, Bottou L, Weinberger KQ (Eds.)]. Curran Associates (Red Hook, NY, USA). 2012.

организација у пет конволуционих слојева, од којих неки праћени обједињавајућим слојевима, и три класична слоја

подешавање 60.000.000 параметара

пример примене у разврставању слика по категоријама

скуп података чине слике из колекције *ImageNet*

<https://image-net.org/index.php>

такмичења *ILSVRC-2010* и *ILSVRC-2012*

<https://image-net.org/challenges/LSVRC/2010/index.php>

<https://image-net.org/challenges/LSVRC/2012/index.php>

## Архитектуре – пример Б

### архитектура *AlexNet*

знатно ослањање на позитивну линеарну функцију активације  
коришћена имплементација операције конволуције за графичке процесоре  
смањење преучавања

аугментација података

додавање нових слика трансформацијом изворних слика  
насумично искључивање неурона (енгл. *dropout*)

1. Конволуционе неуронске мреже
2. Рекурентне неуронске мреже
3. Извори и литература

## Рекурентне неуронске мреже

одликује их присуство повратних (рекурентних) веза

пored преношење сигнала унапред (од улаза према излазима неуронске мреже) могуће је и преношење сигнала уназад

концепт повратне спреге

две основне врсте повратне спреге у неуронским мрежама

локална повратна спрега

на нивоу једног неурона

глобална повратна спрега

на нивоу једног или више слојева

концепт времена

динамички модели (дискретни и континуални)

постоје бројне врсте рекурентних неуронских мрежа

примена у разним доменима

обрада временских низова података

обрада природног језика

обрада звучног садржаја

## Рекурентни неурон

неурон код којег постоји повратна веза

рачунање излаза неурона за посматрани тренутак

и на основу неких улаза у посматраном тренутку

и на основу неких излаза од ранијег тренутка

постоје разне варијанте повратне спреге

повратна спрега може бити усмерена и према истом неурону од којег потиче

улазни и повратни излазни сигнал могу бити комбиновани на разне начине

збир производа улазних вредности и одговарајућих тежина сабран са збиром производа повратних излазних вредности и одговарајућих тежина

збиру може бити додата и вредност прага

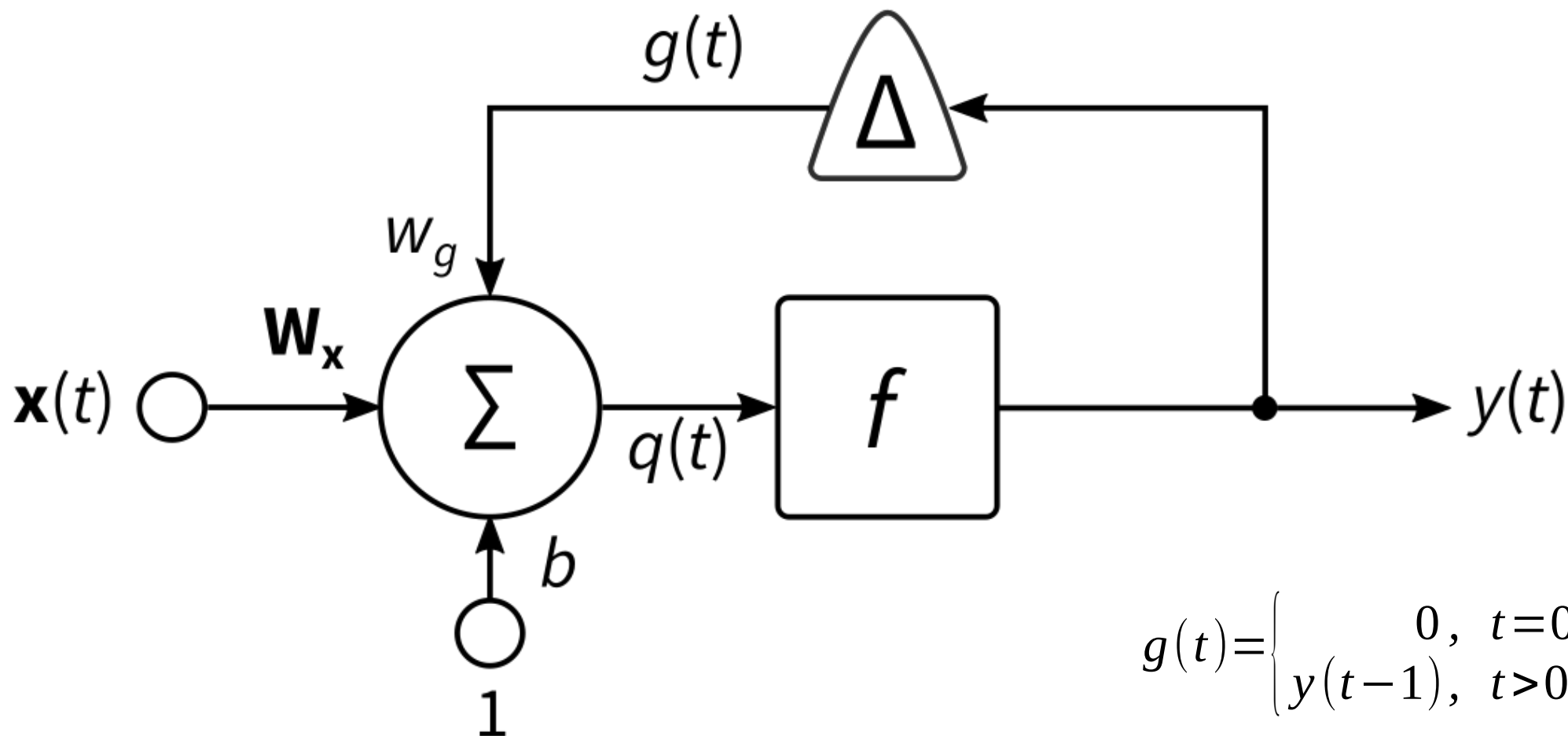
збир производа улазних вредности, повратних излазних вредности и одговарајућих тежина

збиру може бити додата и вредност прага

...

# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентни неурон пример



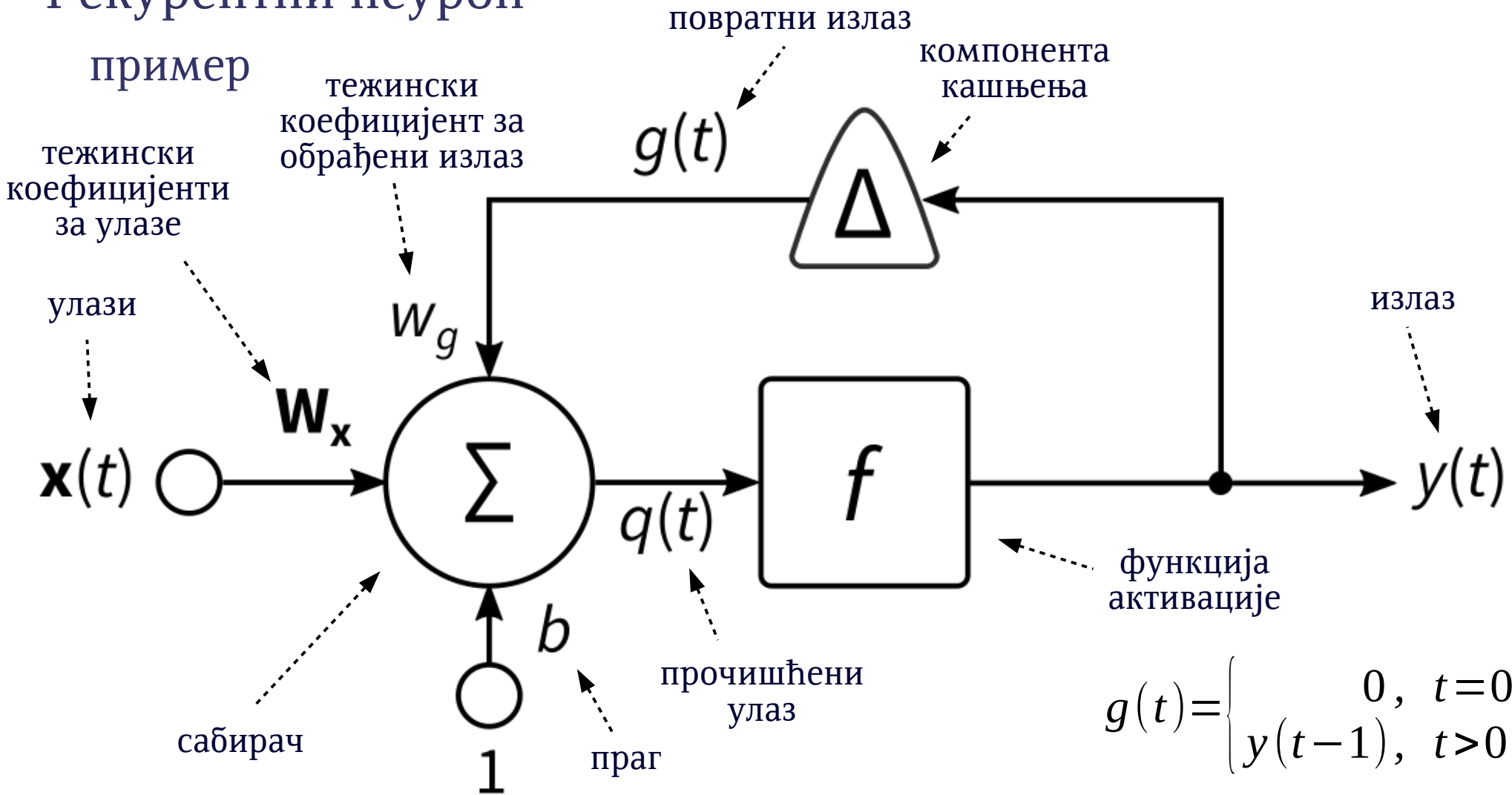
$$g(t) = \begin{cases} 0, & t=0 \\ y(t-1), & t>0 \end{cases}$$

$$y(t) = f(\mathbf{W}_x \mathbf{x}(t) + w_g g(t) + b)$$

# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентни неурон

пример



$$g(t) = \begin{cases} 0, & t=0 \\ y(t-1), & t>0 \end{cases}$$

$$y(t) = f(\mathbf{W}_x \mathbf{x}(t) + w_g g(t) + b)$$

# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентни неурон

### елементи

улази  $\mathbf{x}(t)$

вектор дужине  $n$

представља улазни сигнал у тренутку  $t$

тежински коефицијенти (тежине) за улазе  $\mathbf{W}_x$

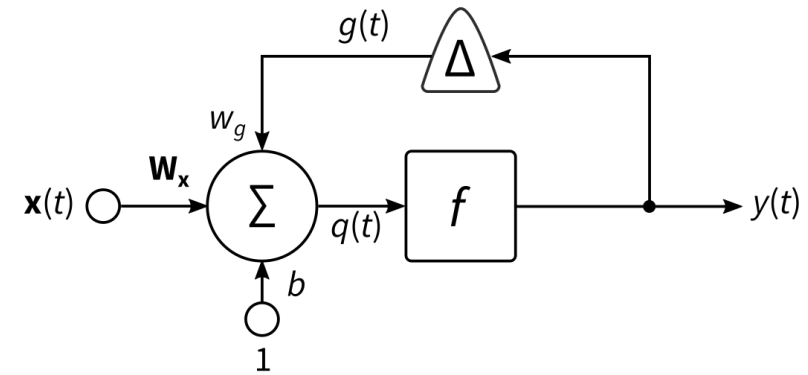
матрица димензија  $1 \times n$

тежински коефицијенти придружени компонентама улаза  $\mathbf{x}$

праг  $b$

скалар

пријемчивост



# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентни неурон

### елементи

излаз  $y(t)$

скалар

представља излазни сигнал у тренутку  $t$

компонента кашњења  $\Delta$  (енгл. *delay*)

учествује у формирању повратне спреге

на основу излазног сигнала генерише повратни излаз

преноси излазни сигнал уз одређено кашњење (обично од једне временске јединице)

повратни излаз  $g(t)$

скалар

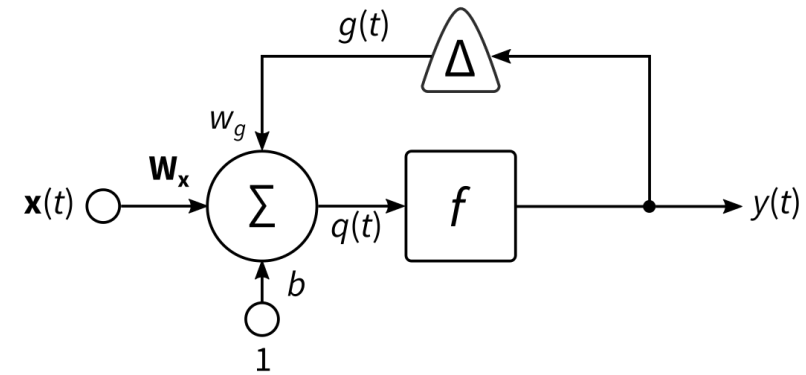
представља повратни сигнал у тренутку  $t$

одговара излазном сигналу у ранијем тренутку (обично у тренутку  $t - 1$ )

тежински коефицијент (тежина) за повратни излаз  $W_g$

скалар

тежински коефицијент придружен повратном излазу



# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентни неурон

елементи

сабирач  $\Sigma$

функција која обједињује три сабирка

компоненте улаза помножене одговарајућим тежинама  $1$

повратни излаз помножен одговарајућом тежином

праг

прочишћени улаз  $q(t)$

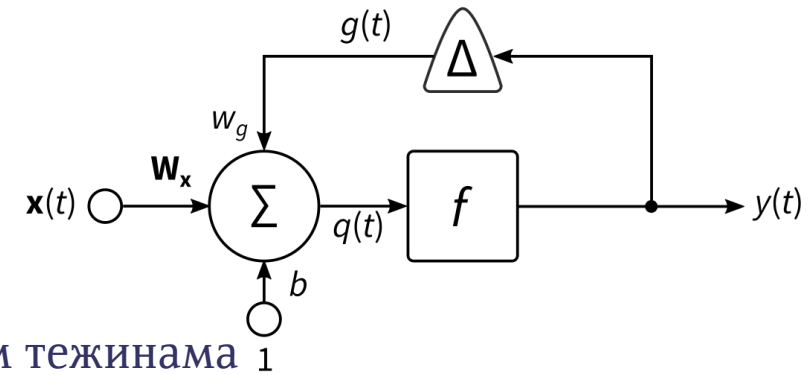
скалар

представља резултат који даје сабирач за тренутак  $t$

$$q(t) = \mathbf{W}_x \mathbf{x}(t) + w_g g(t) + b$$

функција активације  $f$

функција која на основу прочишћеног улаза генерише излаз



## Слој рекурентних неурона

повратна спрега може бити изведена на нивоу целокупног слоја  
рачунање излаза целокупног слоја за посматрани тренутак

и на основу неких улаза у посматраном тренутку

и на основу неких излаза од ранијег тренутка

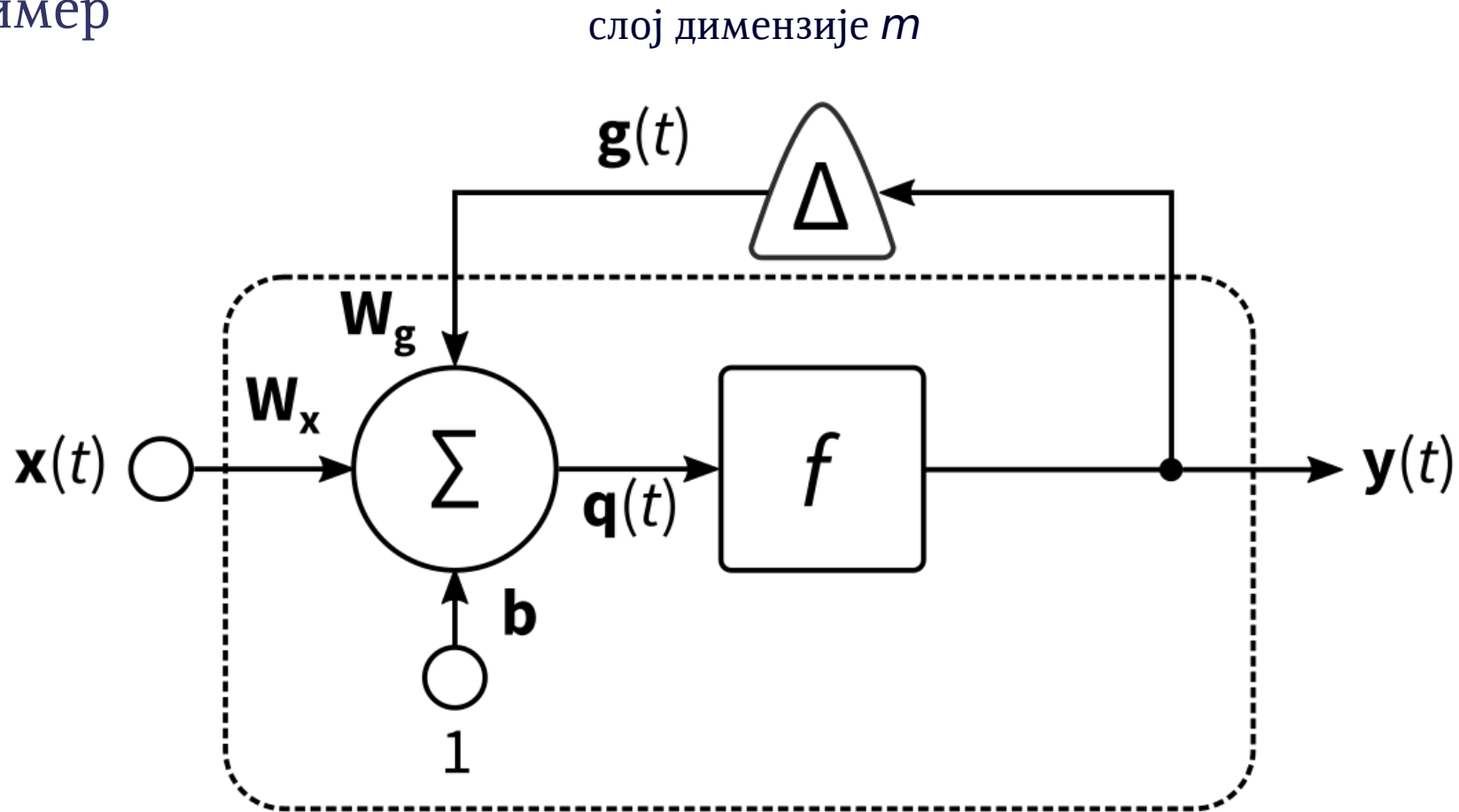
постоје разне варијанте повратне спреге

повратни излазни сигнал не мора бити у целости доведен до сваког неурона

# Рекурентне неуронске мреже

## Слој рекурентних неурона

пример



$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} 0, & t=0 \\ \mathbf{y}(t-1), & t>0 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{W}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_g \mathbf{g}(t) + \mathbf{b})$$

## Рекурентна вишеслојна неуронска мрежа

на нивоу сваког слоја може постојати повратна спрега

и за сваки скривени слој и за излазни слој

понашање слоја може бити представљено општом функцијом

прихвата излаз претходног слоја и повратни излаз текућег слоја

ако је текући слој почетни, онда се као излаз претходног слоја посматра улаз неуронске мреже

генерише излаз слоја

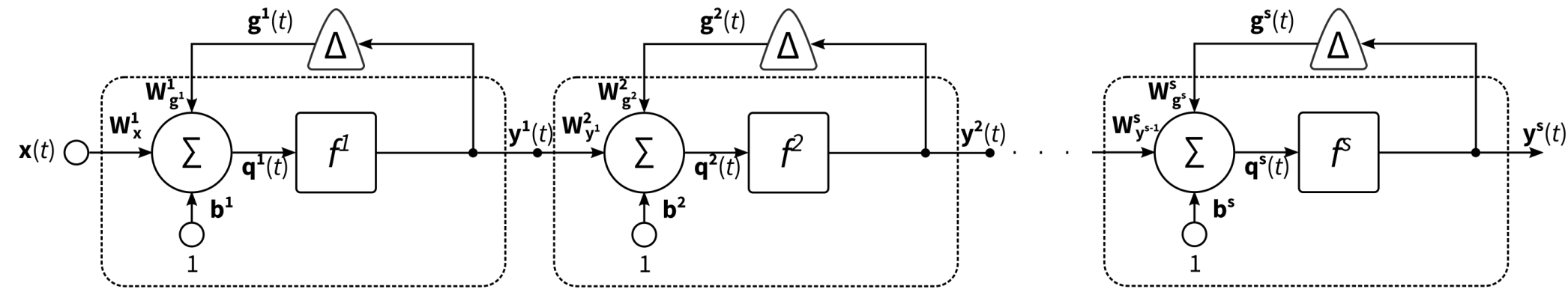
### могућности

било који нелинеарни динамички систем може бити апроксимиран до жељеног нивоа тачности и без ограничења у погледу компактности простора стања помоћу рекурентне неуронске мреже с одговарајућим бројем скривених неурона

# Рекурентне неуронске мреже

## Рекурентна вишеслојна неуронска мрежа

број слојева  $s$



$$\mathbf{y}^r(t) = f^r(\mathbf{W}_{\mathbf{y}^{r-1}}^r \mathbf{y}^{r-1}(t) + \mathbf{W}_{\mathbf{g}^r}^r \mathbf{g}^r(t) + \mathbf{b}^r), \quad r = 1, 2, \dots, s; \quad \mathbf{y}^0 \equiv \mathbf{x}$$

# Рекурентне неуронске мреже

## Меморијска ћелија (ћелија)

део рекурентне неуронске мреже који поседује стање

механизам памћења у неуронској мрежи

стање се успоставља и одржава током времена

на текуће стање могу утицати текући улази и претходно стање

стање се не мора поклапати с излазом

стање је описано функцијом  $\mathbf{h}(t)$

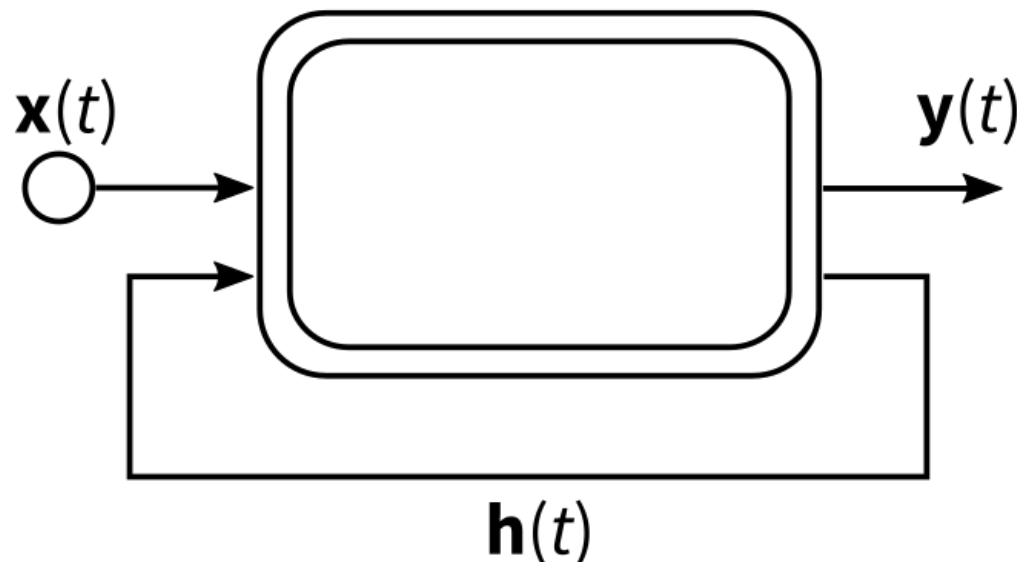
## примери ћелија

рекурентни неурон

рекурентни слој

ћелија типа *LSTM*

...



# Рекурентне неуронске мреже

## Развој рекурентне неуронске мреже у времену

развој у вишеслојну неуронску мрежу

развијена представа понашања кроз време

у сваком тренутку долази до основног умножавања полазне неуронске мреже  
уместо повратних веза успостављају се редовне везе између умножака

развијени облик погодан за обучавање

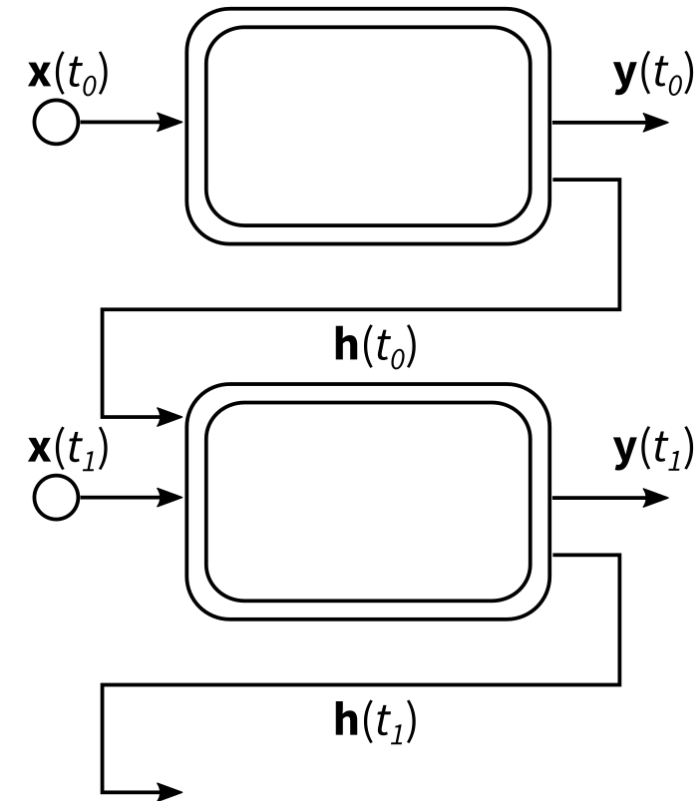
поступак пропагације уназад кроз време

проблеми у обучавању

када се посматра велики број тренутака

дуготрајно обучавање

утицај почетних улаза се постепено губи



## Побољшања основних рекурентних неуронских мрежа

ћелија продуженог краткотрајног памћења

енгл. *long short-term memory (LSTM)*

обухвата улаз и излаз

обухвата два стања

функција  $\mathbf{h}(t)$

одговара краткотрајном памћењу

функција  $\mathbf{c}(t)$

одговара продуженом памћењу

сложена унутрашња структура

рекурентна јединица с колима

енгл. *gated recurrent unit (GRU)*

нешто једноставнија ћелија у односу на ћелију типа *LSTM*

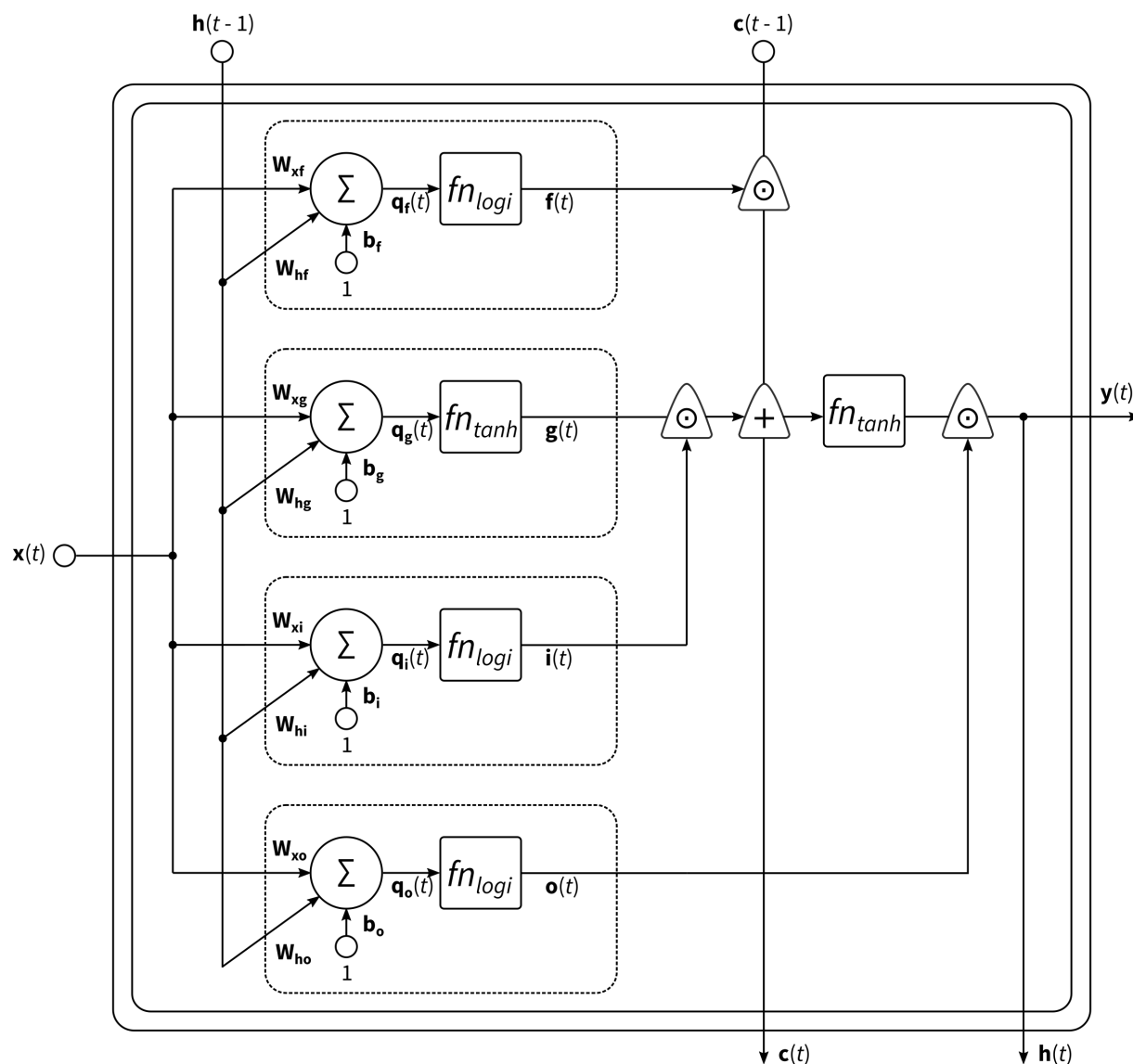
обухвата улаз и излаз

обухвата једно стање

функција  $\mathbf{h}(t)$

# Рекурентне неуронске мреже

## Пример ћелије продуженог краткотрајног памћења



# Рекурентне неуронске мреже

Пример ћелије продуженог краткотрајног памћења

управљање задржавањем/брисањем продуженог памћења

$$\mathbf{f}(t) = \text{logi}(\mathbf{W}_{\text{xf}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hf}}^T \mathbf{h}(t-1) + \mathbf{b}_f)$$

обрађени улаз и краткотрајно памћење

$$\mathbf{g}(t) = \text{tanh}(\mathbf{W}_{\text{xg}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hg}}^T \mathbf{h}(t-1) + \mathbf{b}_g)$$

управљање обрађеним улазом и краткотрајним памћењем

$$\mathbf{i}(t) = \text{logi}(\mathbf{W}_{\text{xi}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hi}}^T \mathbf{h}(t-1) + \mathbf{b}_i)$$

управљање излазом

$$\mathbf{o}(t) = \text{logi}(\mathbf{W}_{\text{xo}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{ho}}^T \mathbf{h}(t-1) + \mathbf{b}_o)$$

продужено памћење

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t) \odot \mathbf{c}(t-1) + \mathbf{i}(t) \odot \mathbf{g}(t)$$

краткотрајно памћење

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{o}(t) \odot \text{tanh}(\mathbf{c}(t))$$

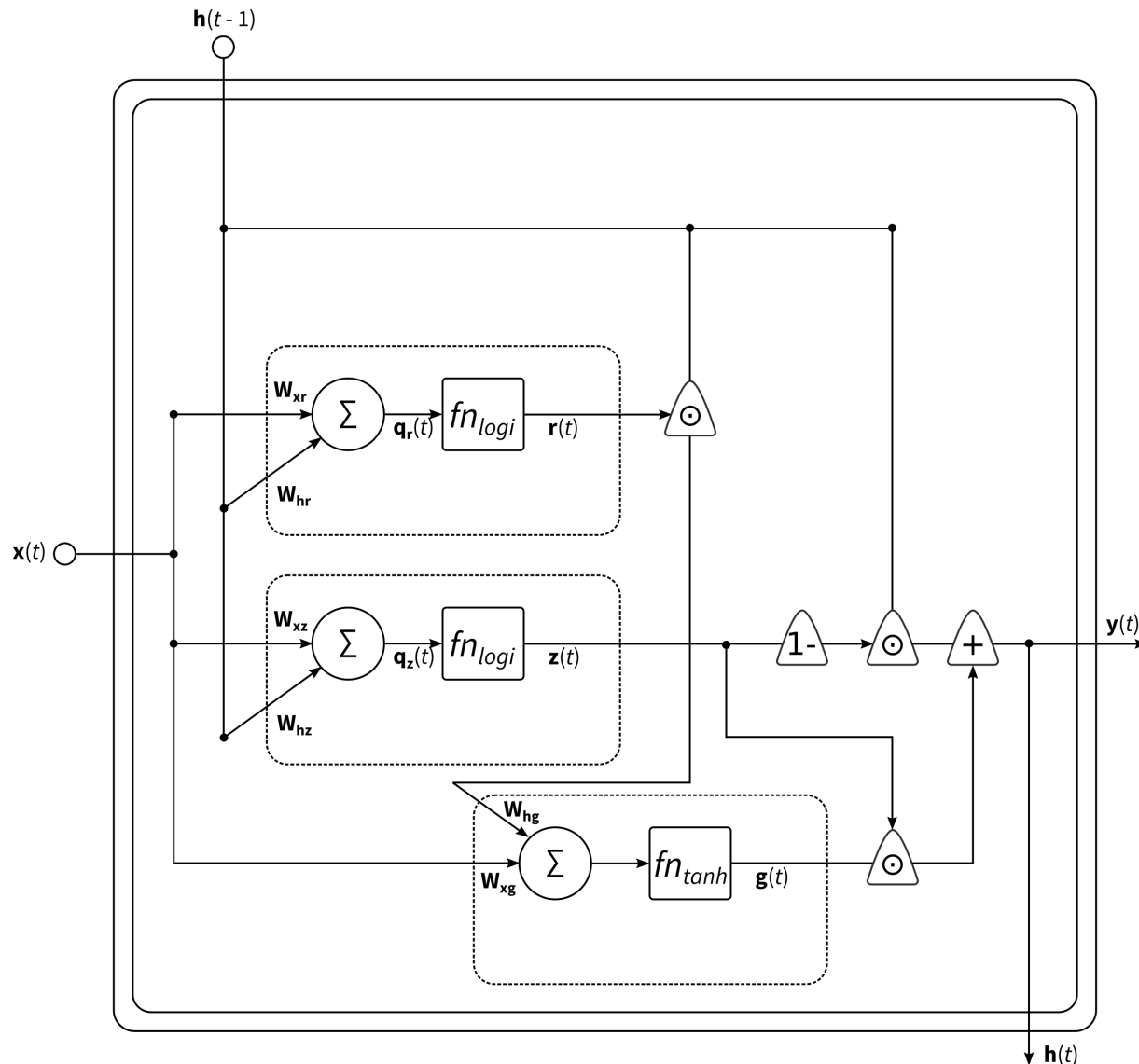
излаз

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)$$

⊙ – Адамаров производ ( множење елемент по елемент )

# Рекурентне неуронске мреже

## Пример рекурентне јединице с колима



# Рекурентне неуронске мреже

Пример рекурентне јединице с колима  
управљање обрадом стања

$$\mathbf{r}(t) = \text{logi}(\mathbf{W}_{\text{xr}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hr}}^T \mathbf{h}(t-1))$$

управљање ажурирањем стања

$$\mathbf{z}(t) = \text{logi}(\mathbf{W}_{\text{xz}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hz}}^T \mathbf{h}(t-1))$$

обрађени улаз и стање

$$\mathbf{g}(t) = \text{tanh}(\mathbf{W}_{\text{xg}}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_{\text{hg}}^T (\mathbf{r}(t) \odot \mathbf{h}(t-1)))$$

стање

$$\mathbf{h}(t) = (1 - \mathbf{z}(t)) \odot \mathbf{h}(t-1) + \mathbf{z}(t) \odot \mathbf{g}(t)$$

излаз

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t)$$

⊙ – Адамаров производ ( множење елемент по елемент )

1. Конволуционе неуронске мреже
2. Рекурентне неуронске мреже
- 3. Извори и литература**

## Основни извори и литература

- ◆ Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. Deep Learning. MIT Press (Cambridge, MA, USA); 2016. Internet: <https://www.deeplearningbook.org/>
- ◆ Géron A. Mašinsko učenje: Scikit-Learn, Keras i TensorFlow: koncepti, alati i tehnike za izgradnju inteligentnih sistema. Prevod 2. izdanja. O'Reilly (Sebastopol, CA, USA), Mikro knjiga (Beograd, Srbija); 2021.
- ◆ Hagan MT, Demuth HB, Beale MH, De Jesús O. Neural Network Design. 2nd edition. eBook. Internet: <https://hagan.okstate.edu/nnd.html>
- ◆ Haykin S. Neural Networks and Learning Machines. 3rd edition. Pearson Education (Upper Saddle River, NJ, USA); 2009.

## Основни извори и литература

- ◆ LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition. Proceedings of the IEEE. 1998 November;86(11); 2278–2324.
- ◆ Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. Advances in Neural Information Processing Systems 25 (NIPS 2012) [Pereira F, Burges CJ, Bottou L, Weinberger KQ (Eds.)]. Curran Associates (Red Hook, NY, USA). 2012.
- ◆ Chung J, Gulcehre C, Cho K, Bengio Y. Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling. arXiv:1412.3555. Internet: <https://arxiv.org/abs/1412.3555>
- ◆ Clark MA, Choi J, Douglas M. Biology 2e. Open Stax, Rice University (Houston, TX, USA); 2018. Internet: <https://openstax.org/details/books/biology-2e>

## Додатни извори и литература

- ◆ Yann LeCun. LeNet-5, convolutional neural networks. Internet: <http://yann.lecun.com/exdb/lenet/>
- ◆ ImageNet. ImageNet. Internet: <https://image-net.org/index.php>
- ◆ Google Code Archive. Cuda-convnet. Internet: <https://code.google.com/archive/p/cuda-convnet/>
- ◆ Jürgen Schmidhuber. Recurrent neural networks. Internet: <https://people.idsia.ch/~juergen/rnn.html>
- ◆ ConvNetJS. ConvNetJS: Deep Learning in your browser. Internet: <https://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/>
- ◆ RecurrentJS. Deep Recurrent Nets character generation demo. Internet: <https://cs.stanford.edu/people/karpathy/recurrentjs/>
- ◆ Nishimoto S, Vu AT, Naselaris T, Benjamini Y, Yu B, Gallant JL. Reconstructing Visual Experiences from Brain Activity Evoked by Natural Movies. *Current Biology*. 2011 October 11;21(19); 1641–1646.

Основне академске студије  
Информациони инжењеринг

Методе и технике науке о подацима

**Одабране класе  
неуронских мрежа**  
(материјали за предавања)